

به نام خدا

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

Applications of Mathematics in Management

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات

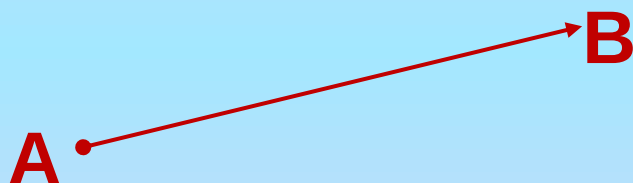
منابع:

ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد دوم) – نشر نی – محمدحسین پورکاظمی
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (جلد دوم) – گسترش علوم پایه – مسعود نیکوکار

بردارها در صفحه

تعریف

پاره خط AB که ابتدای آن A و انتهای آن B در نظر گرفته شود، پاره خط جهت دار نامیده می شود. به شکل زیر توجه کنید:



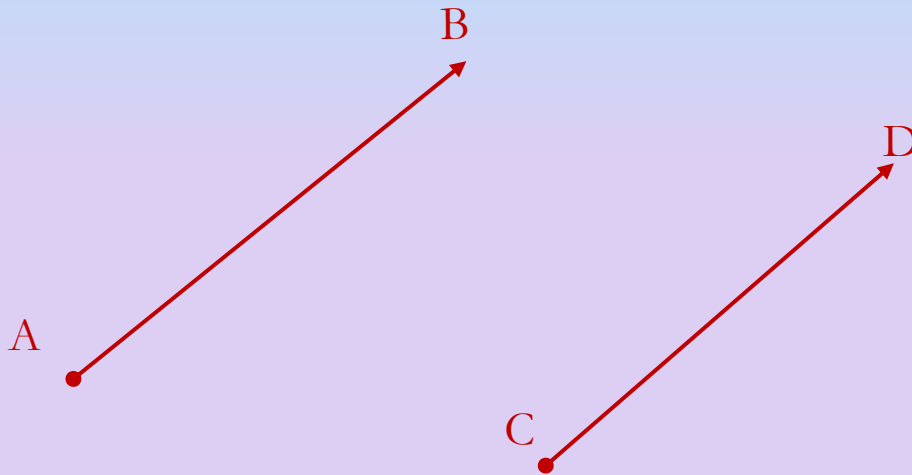
همانطور که می دانیم، رابطه هم سنگ بودن (هم طول، هم راستا و هم اندازه بودن)، مجموعه پاره خطهای جهت دار را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. به نمایندگی هر یک از این کلاس های هم ارزی، بردار گفته می شود.

به عبارت دیگر هر بردار نماینده یک دسته از پاره خطهای جهت دار هم سنگ می باشد.

تساوی دو بردار

دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ را برابر می‌نامیم، هرگاه هر دو نماینده یک کلاس هم ارزی از پاره‌خطهای جهت‌دار باشند.

در این صورت می‌نویسیم $\vec{AB} = \vec{CD}$



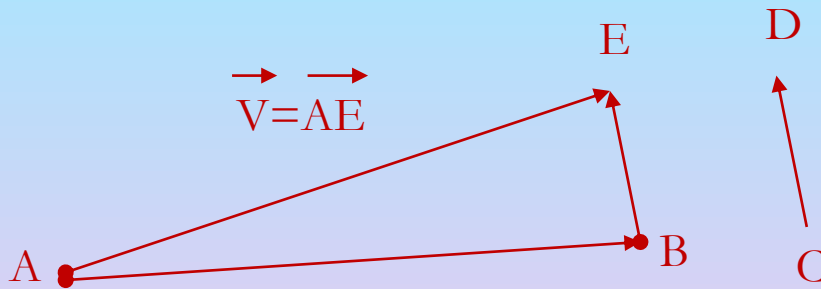
جمع بردارها

دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ را در نظر می گیریم. مجموع $\vec{AB} + \vec{CD}$ برداری است مانند $\vec{V}$ که به یکی از دو روش زیر به دست می آید.

با توجه به تعریف تساوی دو بردار، می توان دو بردار را که دارای یک مبدا نباشند نیز با یکدیگر جمع کرد.

روش اول (روش مثلث)

از نقطه‌ی B بردار $\vec{BE}$ را برابر با بردار $\vec{CD}$ رسم می‌کنیم.
بردار $\vec{V} = \vec{AE}$ مجموع دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ است.

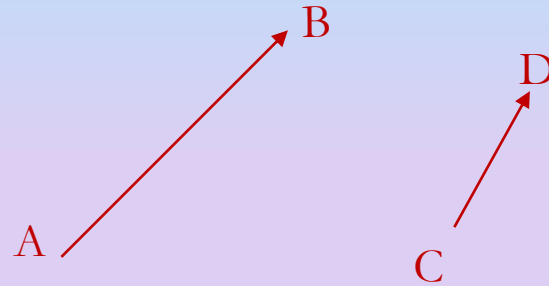
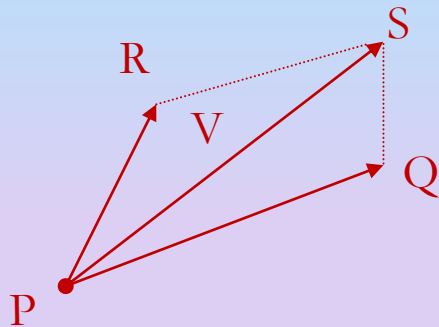


$$\vec{V} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

روش دوم (روش متوازی الاضلاع)

از نقطه ی دلخواه P ، دو برابر $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ را که به ترتیب برابر با

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هستند، رسم می کنیم. بردار $\overrightarrow{PS}$ قطر متوازی الاضلاع حاصل از این دو بردار برابر با $\overrightarrow{V}$ مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است.



$$\vec{V} = \vec{PS} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

بردار صفر

اگر اندازه ی بردار $\vec{V}$ برابر صفر باشد یعنی $|\vec{V}|=0$ ،

بردار $\vec{V}$ را بردار صفر می‌نامیم و $\vec{0}$ با نشان می‌دهیم.

بنا براین اندازه‌ی بردار $\vec{0}$ برابر صفر است، ولی جهت

آن مشخص نیست.

ضرب عدد در بردار (ضرب اسکالر)

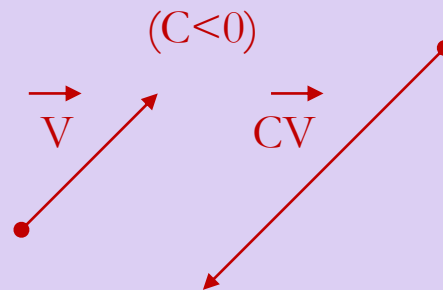
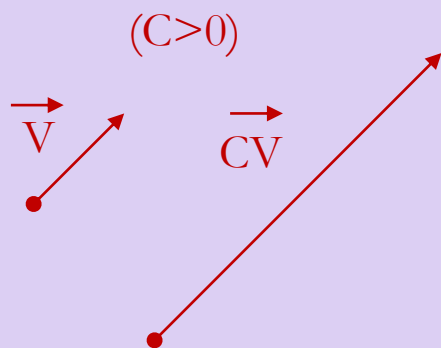
فرض می کنیم $\vec{V}$ برداری دلخواه و C عددی حقیقی باشد.

منظور از حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ برداری است با

اندازه‌ی $C|\vec{V}|$ و هم جهت با $\vec{V}$ اگر $C > 0$ و در خلاف جهت $\vec{V}$

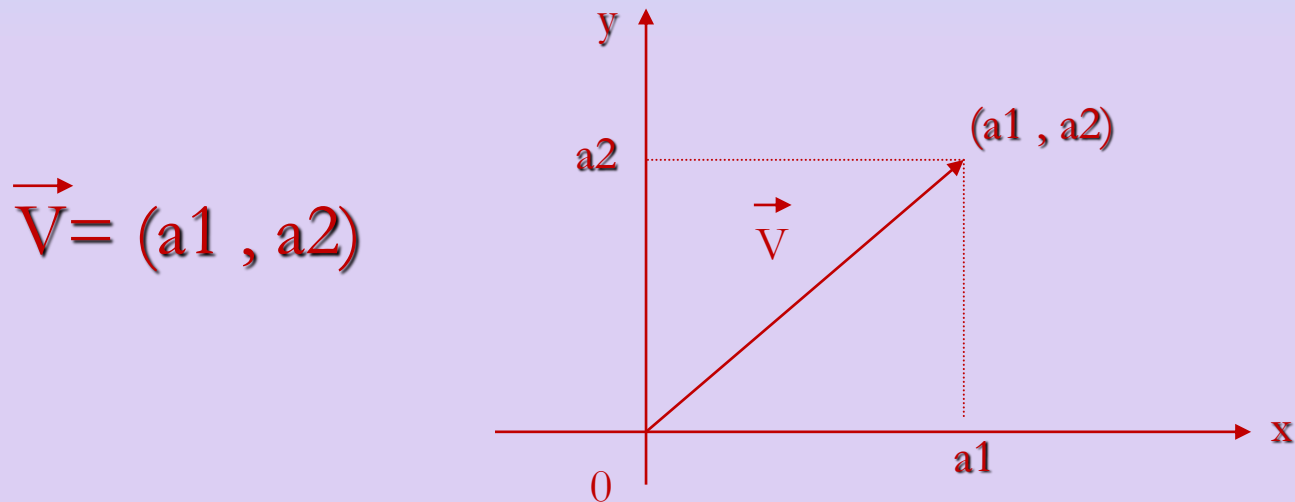
اگر $C < 0$. حاصلضرب عدد C در بردار $\vec{V}$ را با $C\vec{V}$ نشان

می‌دهیم. اگر $C = 0$ آنگاه $C\vec{V}$ برابر است با بردار صفر.



تعریف بردار مکان

برداری $\vec{V}$ را که ابتدای آن مبدا مختصات و انتهای آن نقطه‌ی (a_1, a_2) در صفحه‌ی مختصات xoy است، بردار مکان (a_1, a_2) می‌نامیم. اعداد a_1 و a_2 را مؤلفه‌های بردار $\vec{V}$ می‌نامیم.



مجموع دو بردار با توجه به مولفه‌ها

اگر $\vec{V}_1 = (a_1, a_2)$ و $\vec{V}_2 = (b_1, b_2)$ دو بردار باشند، آنگاه

مجموع $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ برداری است که به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

تعریف قرینه ی یک بردار

اگر $\vec{V} = (a_1, a_2)$ ، آنگاه بردار $(-a_1, -a_2)$ را قرینه ی بردار $\vec{V}$

می‌نامیم و با $-\vec{V}$ نشان می‌دهیم. پس:

$$-\vec{V} = (-a_1, -a_2)$$

تعریف تفاضل دو بردار

بردار $\vec{V} + (-\vec{U})$ را که مساوی با جمع $\vec{V}$ با قرینه‌ی $\vec{U}$

است، تفاضل $\vec{U}$ از $\vec{V}$ می‌نامیم و آن را با $\vec{V} - \vec{U}$ نشان

می‌دهیم. یعنی:

$$\vec{V} - \vec{U} = \vec{V} + (-\vec{U})$$

تعبیر هندسی تفاضل دو بردار

نمایش‌های دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{U}$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم.

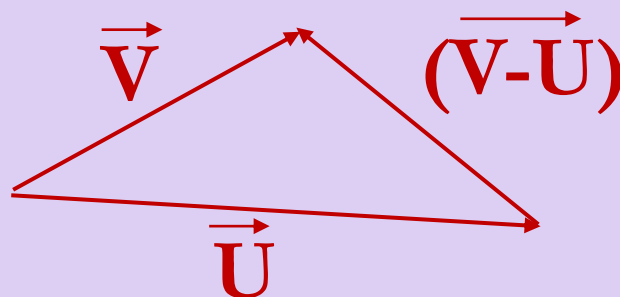
در این صورت، پاره خط جهت داری که مبدا آن نقطه‌ی

انتهای نمایش $\vec{U}$ و انتهای آن، نقطه‌ی انتهای نمایش $\vec{V}$

باشد، یک نمایش بردار $\vec{V}-\vec{U}$ است. زیرا بنا بر تعریف

$$\vec{U} + (\vec{V}-\vec{U}) = \vec{V}$$

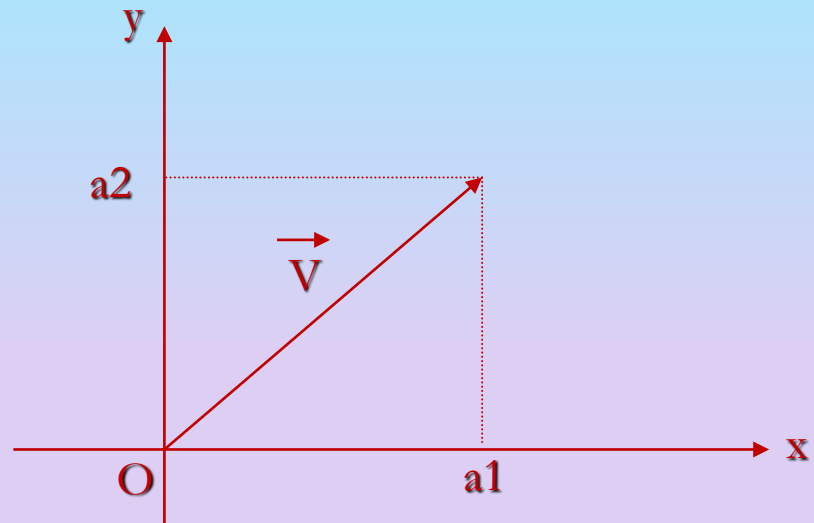
جمع بردارها داریم:



اندازه‌ی یک بردار

اندازه‌ی بردار $\vec{V}=(a_1,a_2)$ برابر است با:

$$|\vec{V}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$



خواص جمع بردارها

اگر $\vec{V}$ ، $\vec{U}$ و $\vec{W}$ بردار، c و d اعدادی حقیقی باشند، آنگاه جمع برداری و ضرب عدد در بردار دارای خواص زیر هستند:

■ $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$ (قانون جابجایی جمع)

■ $\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$ (قانون شرکت پذیری جمع)

■ برداری مانند $\vec{0}$ وجود دارد به طوری که $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$

(وجود عضو خنثی نسبت به عمل جمع)

■ برای هر بردار $\vec{V}$ برداری مانند $-\vec{V}$ وجود دارد که $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$

(وجود قرینه نسبت به عمل جمع)

ادامه

■ $(cd) \vec{V} = c (d\vec{V})$ (قانون شرکت پذیری)

■ $c(\vec{U} + \vec{V}) = c\vec{U} + c\vec{V}$ (قانون بخش پذیری)

■ $(c+d)\vec{U} = c\vec{U} + d\vec{U}$ (قانون بخش پذیری)

■ $U = 1 \times U$ (وجود همانی نسبت به ضرب اسکالر)

تعریف فضای برداری حقیقی

فضای برداری حقیقی V مجموعه‌ای است از بردارها، همراه با اعداد حقیقی (اسکالر‌ها)، با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر، به طوری که هر جفت بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در V و هر اسکالر c ، بردارهای $\vec{U} + \vec{V}$ و $c\vec{U}$ طوری تعریف شده باشند که در خواص اشاره شده برای جمع بردارها، صدق کنند.

بردارهای یکه در صفحه

اندازه‌ی هر دو بردار $(1,0)$ و $(0,1)$ ، برابر با ۱ است،
آنها را بردارهای یکه می نامیم و با نمادهای زیر نشان
میدهیم.

$$\vec{i} = (1,0)$$

$$\vec{j} = (0,1)$$

با توجه به نماد گذاری گذشته برای هر بردار $\vec{V}=(a_1,a_2)$ به دست می آوریم:

$$(a_1,a_2)=a_1 (1,0)+a_2 (0,1)=a_1 \vec{i}+ a_2 \vec{j}$$

بنابر این هر بردار در V را می توان به صورت یک ترکیب

خطی از دو بردار i و j (عبارتی به صورت $a_1 i + a_2 j$ را یک ترکیب خطی

از i و j می نامند.) نوشت. از این رو بردارهای i و j یک پایه برای

فضای برداری V تشکیل می دهند. تعداد عناصر یک پایه در فضای

برداری، بُعد فضای برداری نام دارد.

بنابراین V یک فضای برداری دو بعدی است.

تعریف توانزی بردارها

دو بردار نا صفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را موازی می‌نامیم ، در صورتی

که اسکالر (عدد حقیقی) c وجود داشته باشد، به

طوری که $\vec{V} = c\vec{U}$.

قضیه

اگر $\vec{V}$ بردار نا صفری باشد ، آنگاه

$$\vec{U} = \frac{1}{|\vec{V}|} \vec{V}$$

بردار یکه (واحد) هم جهت با $\vec{V}$ است.

ضرب عددي دو بردار

تعریف ضرب عددی دو بردار

اگر $\vec{U}=(a_1,a_2)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2)$ دو بردار در V باشند،

آنگاه حاصلضرب عددی دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ را با $\vec{U}.\vec{V}$

نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{U}.\vec{V}=(a_1,a_2).(b_1,b_2)=a_1 b_1+a_2 b_2$$

توجه می کنیم که حاصلضرب عددی دو بردار ، عددی

حقیقی است و بردار نیست. این ضرب را ضرب

داخلی یا ضرب نقطه ای دو بردار نیز می نامند.

قضیه (خواص ضرب داخلی)

اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ بردارهایی در V بوده و c یک اسکالر باشد. آنگاه:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} \quad .1$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W} \quad .2$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W} \quad .3$$

$$c(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (c\vec{U}) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (c\vec{V}) \quad .4$$

$$\vec{0} \cdot \vec{U} = 0 \quad .5$$

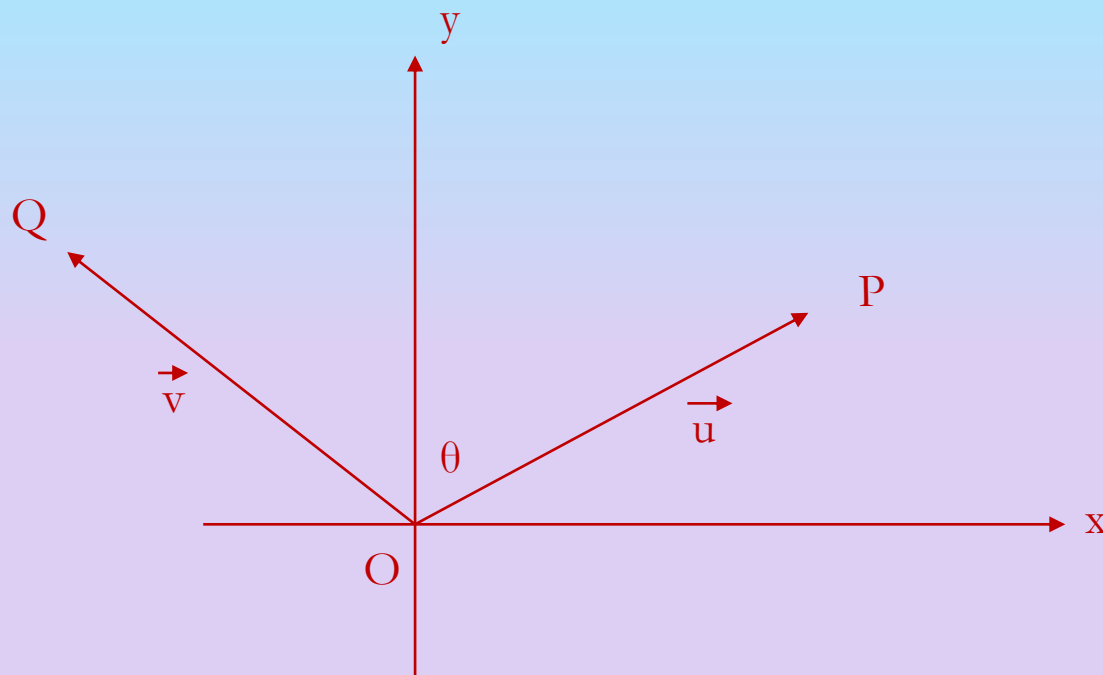
$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2 \quad .6$$

تعریف زاویه ی بین دو بردار

فرض می کنیم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار نا صفر باشند به طوری که $\vec{U}$ مضرب اسکالری از $\vec{V}$ نباشد. اگر $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ به ترتیب بردارهای نمایشگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشند، آنگاه زاویه ی بین U و V را کوچکترین زاویه ی بین دو پاره خط OP و OQ تعریف می کنیم.

شکل زیر زاویه ی بین دو بردار را در حالتی که

مضرب اسکالری از هم نباشد، نشان می‌دهد:



قضیه

اگر θ زاویه ی بین دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشد، آنگاه:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta$$

نتیجه

از قضیه ی قبل نتیجه می شود که دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بر

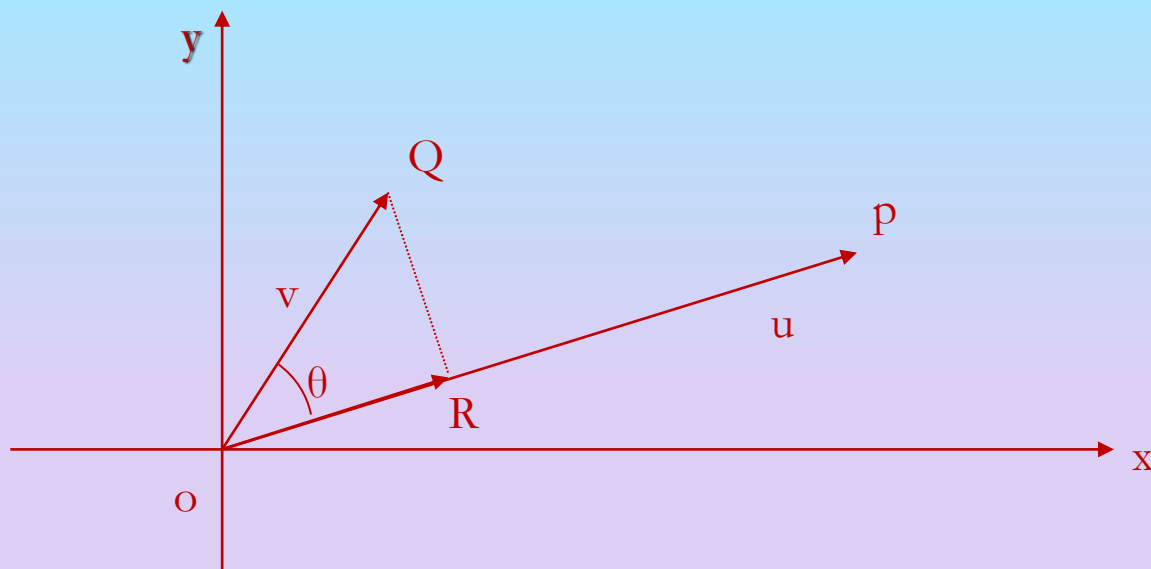
هم عمودند (متعامدند) اگر و تنها اگر:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

۱۰.۲۰.۱۰ تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر

فرض می کنیم $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ به ترتیب نمایشگرهای بردارهای $\vec{U}$ و $\vec{V}$ باشند. تصویر $\vec{OQ}$ در جهت $\vec{OP}$ ، بردار $\vec{OR}$ است، که در آن R پای عمود از نقطه‌ی Q بر خطی است که از دو نقطه‌ی O و P می‌گذرد.

شکل: تصویر بردار $\vec{V}$ بر روی بردار $\vec{P}$



تعریف

اگر $\vec{U}$ بردار ناصفري باشد، تصویر برداری $\vec{V}$ روی بردار $\vec{U}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

اندازه تصویر $\vec{V}$ روی $\vec{U}$ برابر با $|\vec{V}| \cos \theta$ است. با توجه

به قضیه داریم:

$$|\vec{V}| \cos \theta = \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{|\vec{U}|} = \vec{V} \cdot \left(\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \right)$$

بردارها در فضای سه بعدی

تعریف

مجموعه‌ی تمام سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای عددی سه بعدی می‌نامیم و آن را با R^3 نمایش می‌دهیم. هر سه تایی مرتب (x, y, z) را یک نقطه در فضای R^3 می‌نامیم.

قضیه

فاصله‌ی دو نقطه $p(x_1, y_1, z_1)$ و $p(x_2, y_2, z_2)$

برابر است با:

$$|\vec{pp}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

تعریف

یک بردار در فضای سه بعدی، یک سه تایی مرتب از اعداد حقیقی به صورت (x, y, z) است. اعداد x, y و z را مولفه‌های بردار (x, y, z) می‌نامیم. مجموعه تمام بردارهایی به صورت (x, y, z) را با $\mathbb{R}^3$ نمایش می‌دهیم.

اگر بردارهای یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ عبارت باشند از:

$$\vec{i}=(1,0,0) \quad \vec{j}=(0,1,0) \quad \vec{k}=(0,0,1)$$

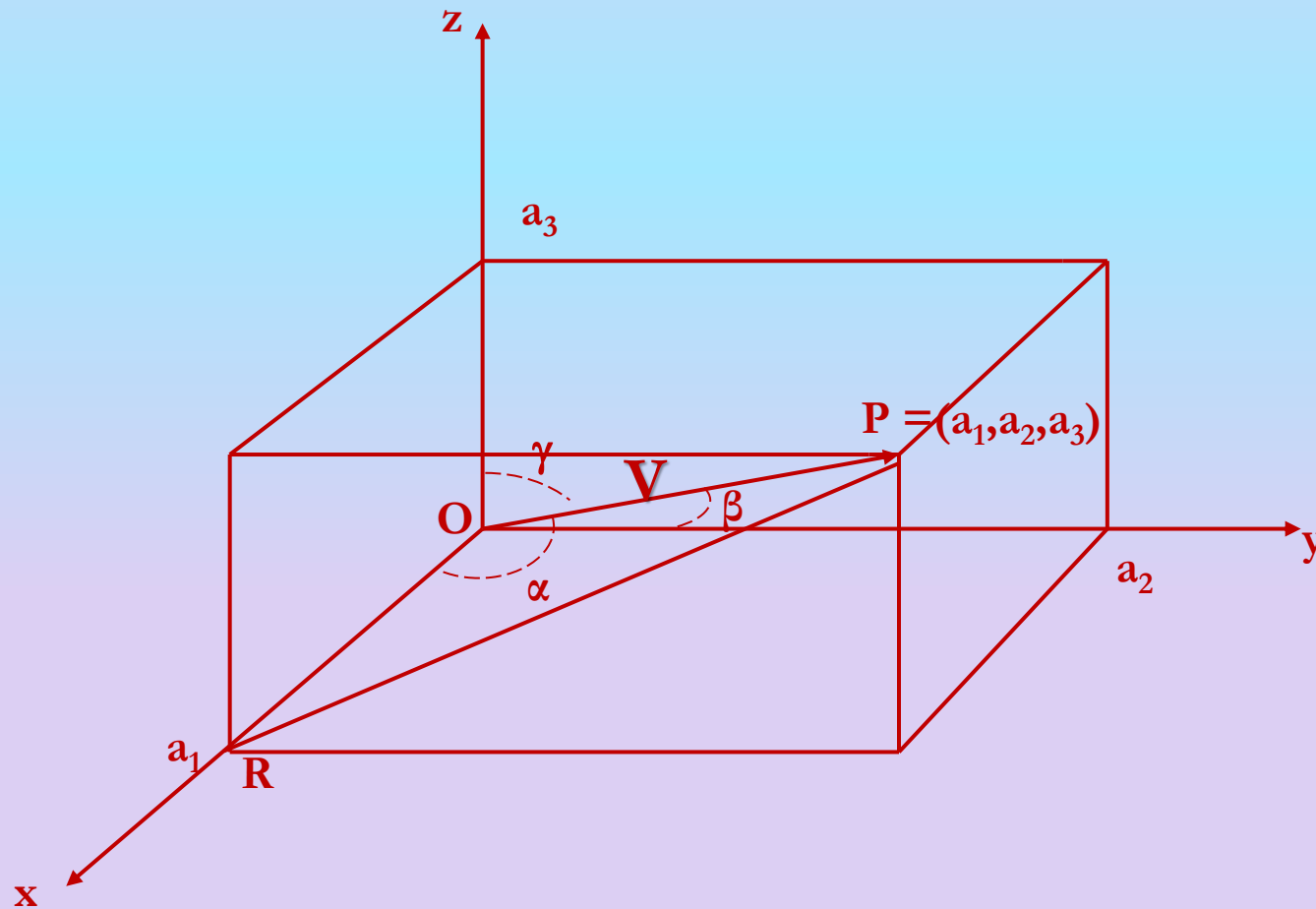
آنگاه هر بردار $\vec{V}=(a_1, a_2, a_3)$ در R^3 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}=(a_1, a_2, a_3)= a_1\vec{i}+ a_2\vec{j}+ a_3\vec{k}$$

تعریف

سه زاویه α ، β و γ زوایایی که بردار نا صفر $\vec{V}$ به ترتیب با جهت مثبت محورهای x ، y و z می‌سازد را زوایای هادی $\vec{V}$ می‌نامیم. توجه کنید که هر زاویه‌ی هادی بزرگتر یا مساوی 0 و کوچکتر یا مساوی π است.

زوایای هادی بردار $\vec{V} = (a_1, a_2, a_3)$:



در شکل مؤلفه‌های V اعدادی مثبت و زوایای هادی آن مثبت و کوچکتر $\pi/2$ از هستند. به طوری که در شکل دیده می شود، مثلث OPR قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{V}|}$$

می‌توان نشان داد که دستور اخیر به ازای $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$

نیز برقرار است. دستورهای مشابهی برای $\cos \beta$ و

$\cos \gamma$ به دست می‌آیند.

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{v}|}$$

اعداد $\cos \alpha$ و $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ را کسینوسهای هادی بردار $\vec{V}$ می نامند.

توجه کنید که بردار صفر، زوایای هادی و در نتیجه کسینوسهای هادی ندارد.

نکته

اگر اندازه ی یک بردار و کسینوسهای هادی آن معلوم باشند، آنگاه بردار به طور منحصر به فردی معین

$$a_1 = \cos \alpha |\vec{V}|$$

$$a_2 = \cos \beta |\vec{V}|$$

$$a_3 = \cos \gamma |\vec{V}|$$

است، زیرا:

قضیه

اگر $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ کسینوس‌های هادی بردار

$\vec{V}$ باشند، آنگاه:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

نتیجه

از قضیه و تعریف کسینوس‌های هادی نتیجه می شود که مؤلفه‌های یک بردار یکه، کسینوس‌های هادی آن هستند.

به عبارت دیگر اگر $V=(a_1,a_2,a_3)$ و U بردار یکه هم

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{a_1}{|\vec{V}|} \hat{i} + \frac{a_2}{|\vec{V}|} \hat{j} + \frac{a_3}{|\vec{V}|} \hat{k} \quad \text{جهت با } V \text{ باشد آنگاه:}$$

$$\vec{U} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

در مورد بردارها در فضا، اعمال جمع، تفریق، ضرب
اسکالر و ضرب عددی دو بردار در R^3 ، مشابه R^2 ،
تعریف می‌شوند.

فرض می‌کنیم $\vec{U}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,b_3)$ دو
بردار و C یک اسکالر باشد. داریم:

$$1) \vec{U} + \vec{V} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$2) \vec{U} - \vec{V} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$3) C \vec{U} = C(a_1, a_2, a_3) = (Ca_1, Ca_2, Ca_3)$$

$$4) \vec{U} \cdot \vec{V} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$5) \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$6) \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

قضیه

اگر θ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در R^3 باشد آنگاه:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| |\vec{V}| \cos \theta$$

دو بردار در R^3 را موازی می‌نامیم اگر و تنها اگر یکی از بردارها مضرب اسکالری از دیگری باشد. بنابراین:

دو بردار ناصفر در R^3 موازی یکدیگرند اگر و تنها اگر زاویه بین آنها 0 یا π باشد.

دو بردار ناصفر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ در R^3 متعامدند اگر و تنها اگر

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

ضرب برداری

(ضرب خارجی)

تعریف

اگر $\vec{U} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{V} = (b_1, b_2, b_3)$ آنگاه حاصل ضرب

برداری $\vec{U}$ در $\vec{V}$ ، برداری است که به صورت زیر

تعریف می شود:

$$\vec{U} \times \vec{V} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ضرب برداری دو بردار را به صورت‌های زیر نیز می‌توان

تعریف کرد:

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

تعریفی دیگر برای ضرب خارجی

ضرب خارجی دو بردار، برداری است که به صورت راست‌گرد جهت آن مشخص می‌شود و بر صفحه گذرنده از دو بردار، عمود می‌باشد. اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار نیز با مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو بردار تشکیل می‌دهند، برابر

$$|\vec{U} \times \vec{V}| = |\vec{U}| |\vec{V}| \sin(\vec{U}, \vec{V}) \quad \text{است.}$$

شرط موازی بودن دو بردار

$$|\vec{U} \times \vec{V}| = |\vec{U}| |\vec{V}| \sin(\vec{U}, \vec{V}) \quad \text{با توجه به رابطه}$$

نتیجه می‌گیریم که شرط موازی بودن دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{V}$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \vec{V} \times \vec{U} = \vec{0} \quad \text{این است که:}$$

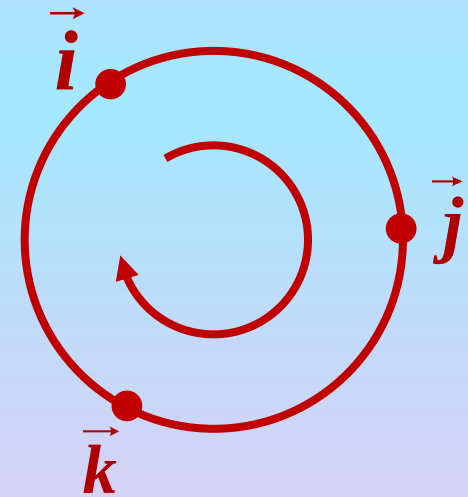
ضرب خارجی بردارهای پایه

$$۱) \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$$

$$۲) \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$۳) \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$۴) \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



**

$(i j k i j k i j k i j k)$

خواص ضرب خارجی

$$۱) \vec{U} \times \vec{V} = -\vec{V} \times \vec{U}$$

$$۲) \vec{U} \times \vec{U} = \vec{0}$$

$$۳) \vec{U} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{U} = \vec{0}$$

$$۴) (c\vec{U}) \times \vec{V} = \vec{U} \times (c\vec{V}) = c(\vec{U} \times \vec{V})$$

$$۵) \vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{W}$$

$$۶) (\vec{V} + \vec{W}) \times \vec{U} = \vec{V} \times \vec{U} + \vec{W} \times \vec{U}$$

تعریف ضرب سه گانه

برای سه بردار $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ و $\vec{W}$ حاصل ضرب $\vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})$ را حاصل ضرب سه گانه بردارهای $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ و $\vec{W}$ گویند و حاصل آن یک عدد حقیقی و برابر حجم متوازی السطوحی است که با این سه بردار ساخته می شود.

خواص ضرب سه گانه

$$۱) \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W}$$

$$۲) \vec{U} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}$$

$$۳) \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$۴) \vec{U} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = 0, \quad (\vec{U} \neq \vec{O}, \vec{V} \neq \vec{O})$$

بردارها در فضای n بعدی

تعریف

فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد. n تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ مجموعه‌ای از n عدد است که به ترتیب معینی نوشته شده‌اند.

اعداد حقیقی $x_n, \dots, x_2, x_1$ را به ترتیب مؤلفه‌های اول تا n ام این n تایی مرتب می‌خوانیم. مجموعه‌ی تمام n تایی‌های مرتب را با R^n نشان می‌دهیم.

تعریف

فرض می کنیم $\vec{U}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ دو بردار در V^n و c عدد حقیقی (اسکالر) باشد.

مجموع دو بردار و ضرب اسکالر عدد در بردار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{U}+\vec{V}=(a_1+b_1 , a_2+b_2 , \dots , a_n+b_n)$$

$$c\vec{U}=(c a_1 , c a_2 , \dots , c a_n)$$

قضیه

فرض می‌کنیم $\vec{U}$ و $\vec{V}$ و $\vec{W}$ سه بردار در V^n و c و k دو اسکالر (عدد حقیقی) باشند. در این صورت:

(الف) جمع بردارها جا به جایی پذیر است، یعنی: $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$

(ب) جمع بردارها شرکت پذیر است. $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$

(پ) عمل جمع دارای عضو خنثی است. بردار $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

بردار صفر n مؤلفه‌ای وجود دارد به طوری که $\vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$

ت) برای هر $\vec{U}$ بردار قرینه $-\vec{U}$ وجود دارد به طوری که

$$\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$$

$$c (\vec{U} + \vec{V}) = c \vec{U} + c \vec{V} \quad \text{(ث)}$$

$$(c k) \vec{U} = c (k \vec{U}) \quad \text{(ج)}$$

$$(c + k) \vec{U} = c \vec{U} + k \vec{U} \quad \text{(ح)}$$

$$1\vec{U} = \vec{U} \quad \text{(خ) وجود عضو همانی نسبت به ضرب اسکالر،}$$

تعریف

طول بردار $\vec{U} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ برابر است با:

$$|\vec{U}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$