

به نام خدا

تحقیق در عملیات ۱

Operations Research (OR)

مفاهیم و کاربردهای برنامه‌ریزی خطی

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات

منابع:

تحقیق در عملیات، عادل آذر، موسسه نشر علوم نوین

پژوهش عملیاتی، محمدرضا مهرگان، نشر کتاب دانشگاهی

آشنایی با تحقیق در عملیات، حمدی طه، نشر دانشگاهی

مقدمه:

تحقیق در عملیات یکی از علوم بین رشته‌ای است که در فرآیند تصمیم‌گیری در مدیریت بسیار کاربرد دارد. تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین وظایف یک مدیر است. زمانیکه بیش یک روش برای انجام کاری وجود دارد، بسیار مهم است که یک مدیر بتواند ضمن توجه به محدودیت منابع و استفاده بهینه از آنها، کار مورد نظر را با بهترین کیفیت و رعایت استانداردهای تعیین شده به انجام برساند.

بی شک با توجه به پیچیدگی محیط تصمیم‌گیری و وجود متغیرهای موثر فراوان، نیاز به یک ابزار قدرتمند برای نیل به این هدف وجود دارد. تحقیق در عملیات به عنوان یکی از این ابزارهای قدرتمند و کارآمد با بهره‌گیری از مدل‌سازی ریاضی و راه‌حل‌های متنوع حل آنها، می‌تواند یاری‌گر مدیران در اخذ تصمیمات بهینه باشد.

تحقیق در عملیات با رویکرد علمی و سیستماتیک خود،

منجر به تغییر نگرش مدیران در مواجهه با مسایل حوزه فعالیت خود، می‌گردد.

سرفصل‌های درس:

فصل اول:

✓ تعریف، تاریخچه و ویژگی‌های تحقیق در عملیات

✓ تعریف مدل و انواع آن

فصل دوم

✓ مقدمه

✓ مدل‌سازی دنیای واقعی در قالب مسایل برنامه‌ریزی خطی

✓ مساله ترکیب تولید

✓ مساله رژیم غذایی

✓ مساله سرمایه‌گذاری

✓ مساله تبلیغات

✓ مساله حمل و نقل

✓ مساله امتزاج

✓ مساله زمانبندی چند دوره‌ای

✓ مساله ترکیب محصولات کشاورزی

✓ مساله چوب‌بری

✓ مدل عمومی برنامه‌ریزی خطی LP

فصل سوم

✓ حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

فصل چهارم

✓ حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

✓ روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

✓ بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی

فصل پنجم:

✓ تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

✓ مساله ثانویه



مبانی تحقیق در عملیات

Foundations of Operations Research



تعریف تحقیق در عملیات

۱- تحقیق در عملیات به مجموعه‌ای از روش‌های علمی و فنونی گفته می‌شود که به منظور شناخت مسائل درون سیستم به کار می‌رود و درصدد یافتن جواب بهینه (Optimum) برای مسایل است.

۲- تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روش‌های علمی برای مطالعه و بررسی فعالیت‌ها و عملیات پیچیده در سازمان‌های بزرگ

۳- کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسایل و تصمیمات مدیریتی



تاریخچه تحقیق در عملیات

تحقیق در عملیات (Operation Research) در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه یافت و پس از جنگ وارد دنیای تجارت گردید.

در اوایل دهه ۱۹۵۰ در آمریکا کارشناسان OR وارد بخش صنعت شدند و فنونی همچون برنامه‌ریزی پویا، نظریه صف و نظریه موجودی‌ها را توسعه دادند.

ابداع روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ توسط جرج دنتزیک (George Dantzig) باعث پیشرفت سریع فنون OR و کاربرد بیشتر آن در صنایع گردید.

پیشرفت چشمگیر مبانی ریاضی به کار رفته در تحقیق در عملیات از یک سو و توسعه فن‌آوری رایانه از سوی دیگر، دامنه کاربرد تحقیق در عملیات را گسترش داده است. به طوریکه امروزه در بیشتر سازمان‌ها، در صدد استقرار سیستم‌های هوشمند با استفاده از منطق فازی هستند تا مدیران بتوانند در شرایط مبهم و نادقیق تصمیمات بهتری اتخاذ کنند.



ویژگی‌های تحقیق در عملیات

- ❖ تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم‌گیری مدیران است.
- ❖ رویکرد OR یک رویکرد علمی است.
- ❖ در OR مسایل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می‌شوند.
- ❖ OR یک دانش بین رشته‌ای است. یعنی از ترکیب چندین رشته مستقل به وجود آمده است.
- ❖ در OR از مدل‌های ریاضی استفاده می‌شود.
- ❖ در OR به وفور از رایانه استفاده می‌شود.



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – تصمیم‌گیری

یک تصمیم نتیجه فرآیند انتخاب یک گزینه بهتر از دو یا چند گزینه متفاوت است که ما را به هدف می‌رساند. حتی هنگام برنامه‌ریزی نیز ما درگیر اخذ تصمیمات متعدد هستیم.

(چه کاری؟ چه وقت؟ چگونه؟ کجا؟ توسط چه کسی؟)

فرآیند سیستماتیک تصمیم‌گیری شامل مراحل زیر است:

۱ – تعریف مساله

۲ – شناخت راه‌حل‌های ممکن

۳ – ارزیابی راه‌حل‌های ممکن

۴ – انتخاب یک راه‌حل



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – رویکرد علمی

رویکرد علمی یک فرآیند فرموله شده است که توسط فیلسوف فرانسوی دکارت در قرن هفدهم تعریف شده است و شامل مراحل زیر می‌باشد.

روش علمی

۱ – تعریف مساله

۲ – شناخت مساله

۳ – تعریف فرضیه

۴ – آزمایش: طراحی و اجرا

۵ – تایید یا رد فرضیه

فرآیند تصمیم‌گیری

۱ – تعریف مساله

۲ – جستجوی راه‌حل‌های ممکن

۳ – ارزیابی راه‌حل‌های ممکن

۴ – انتخاب گزینه مناسب



ویژگی‌های تحقیق در عملیات - نگاه سیستمی

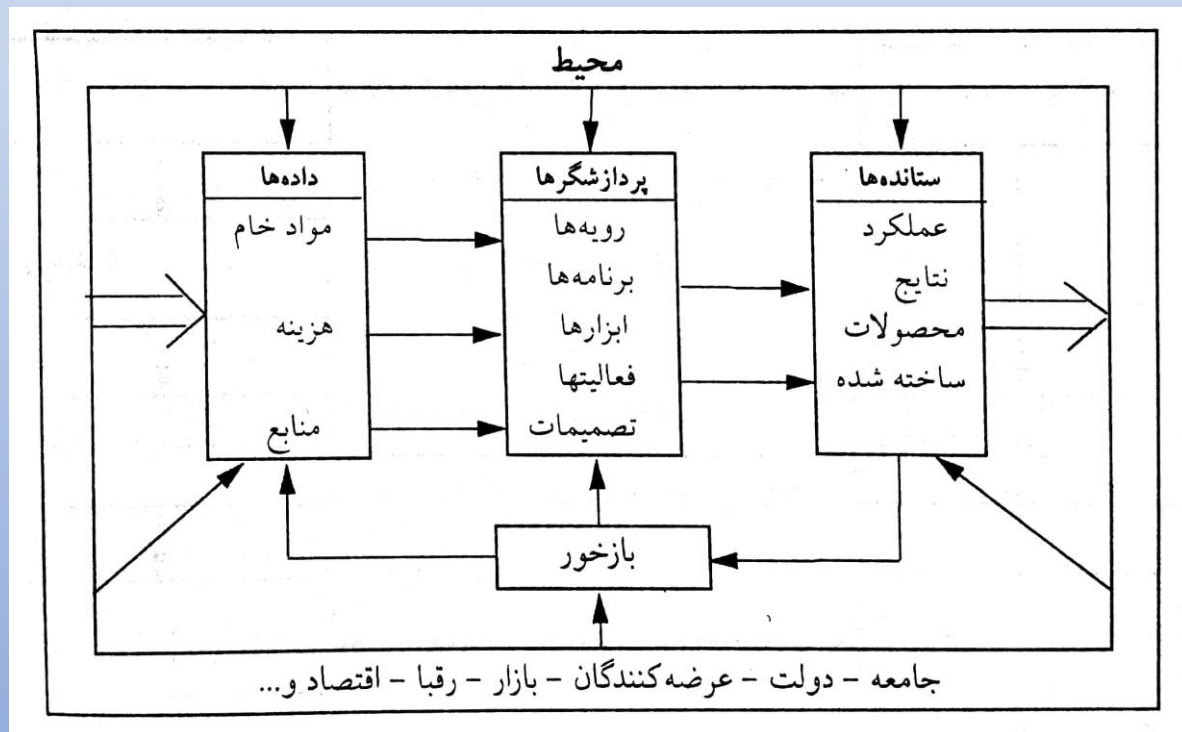
یک سیستم؛ مجموعه‌ای از افراد، منابع، و رویه‌هایی است که به گونه‌ای با هم در تعامل هستند که در راستای رسیدن به هدفی مشخص ایفای نقش می‌کنند. در هر سیستم سه بخش اصلی ورودی‌ها (Inputs)، پردازشگرها (Processors) و خروجی‌ها (Outputs) وجود دارند و سایر بخش‌های تاثیرگذار

به عنوان محیط سیستم در نظر گرفته می‌شوند.

در هر سیستم، حلقه بازخور اطلاعات حاصل از

خروجی سیستم را به منظور ایجاد اصلاحات لازم

به قسمت ورودی منتقل می‌کند.





ویژگی‌های تحقیق در عملیات – دانش بین رشته‌ای

مسایل مدیریتی که باید در مورد آنها تصمیم گرفت دارای ابعاد اجتماعی، اقتصادی، روانشناسی، مهندسی، ریاضی و حتی در برخی موارد سیاسی و بین‌المللی هستند. بنابراین نمی‌توان از یک فرد انتظار داشت که در همه این ابعاد تخصص داشته باشد و معمولاً برای حل این مسایل تیم‌های تخصصی تشکیل می‌شوند که در آن ابعاد مختلف تصمیمات مورد توجه قرار بگیرند تا تصمیمات به راه‌حل‌های واقعی منجر شود.

در واقع متخصص OR با استفاده از دانش و تخصص گروه‌های تخصصی، مدل خود را کامل و به واقعیت نزدیک‌تر می‌کند و به این ترتیب خروجی مدل‌ها که با استفاده از فنون و تکنیک‌های OR به دست می‌آیند، کارایی بیشتری در دنیای واقعی خواهند داشت.



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – مدل‌ها در OR

مدل؛ ساده شده یا تجرید واقعیت است. پیچیدگی دنیای واقعی و در نتیجه پیچیدگی مسایل واقعی، ما را به استفاده از مدل‌ها که بیان ساده‌ای از واقعیت را دارند، سوق می‌دهد.

البته باید توجه داشت ساده‌سازی و انتزاعی بودن مدل‌ها، دستیابی به اهداف را با مشکل روبرو می‌سازد. به طوری که پاسخ مدل، الزاما پاسخ مساله واقعی نیست و باید مرحله به مرحله به پیچیدگی مدل افزود و ابعاد بیشتری از مساله واقعی را در آن لحاظ کرد تا پاسخ مدل، عملیاتی باشد.

مدل‌ها با توجه به میزان انتزاعی بودن به سه دسته تقسیم می‌شوند.

۳- مدل ریاضی

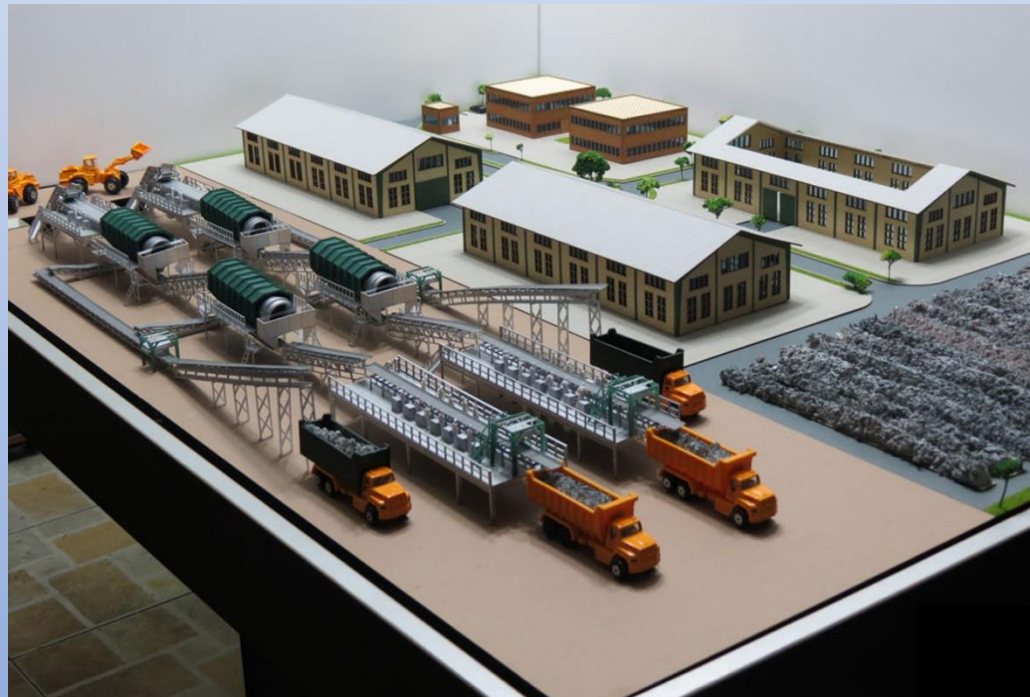
۲- مدل قیاسی

۱- مدل شمایی



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – مدل‌ها در OR – مدل شمایی

۱ – مدل شمایی: جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولاً در اندازه‌های متفاوت نشان داده می‌شود. این مدل‌ها بسیار به سیستم واقعی شبیه هستند و درجه انتزاع کمتری برخوردار می‌باشند. ماکت‌های سه بعدی و تصاویر دو بعدی از مثال‌های مدل شمایی می‌باشند.

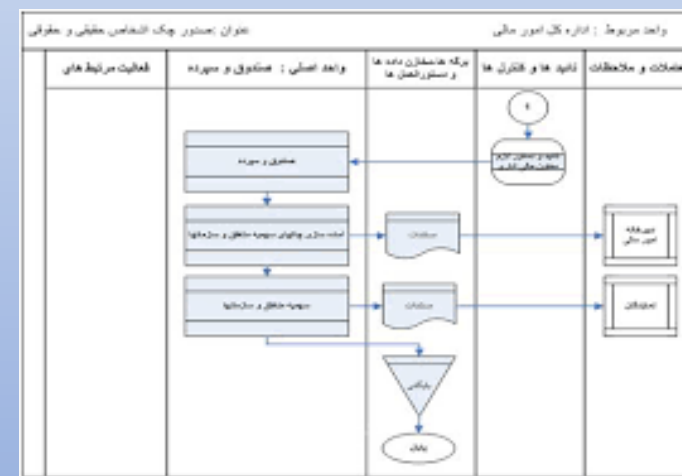
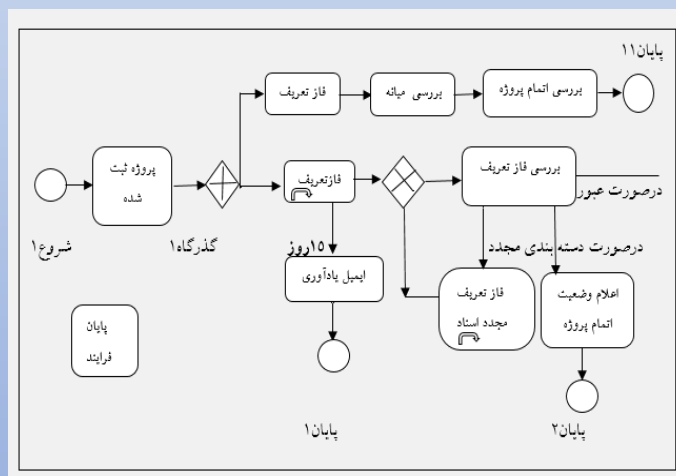


مدل شمایی بازیافت زباله:



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – مدل‌ها در OR – مدل قیاسی

۲- مدل قیاسی: مدل‌هایی که رفتاری شبیه به سیستم واقعی دارند ولی عیناً شبیه آن نیستند و در آنها درجه‌ای از انتزاع وجود دارد. به عنوان نمونه چارت سازمانی که نشان‌دهنده جایگاه و نحوه ارتباط افراد یک سازمان می‌باشد، از جمله مدل‌های قیاسی است. نقشه‌ها، فلوچارت‌ها، نمودار گردش عملیات و . . . نیز از جمله مدل‌های قیاسی هستند.





ویژگی‌های تحقیق در عملیات – مدل‌ها در OR – مدل ریاضی (سمبولیک)

۳- مدل ریاضی: پیچیدگی روابط اجزای بیشتر سیستم‌های واقعی و نحوه ارتباط و تعامل اجزا در آن‌ها بسیار زیاد است و در نتیجه مدل‌های شمایی و قیاسی قادر به نمایش آن به نحو مطلوب نیستند. در چنین شرایطی لاجرم باید ساده‌سازی بیشتری در مدل‌سازی صورت پذیرد و در نتیجه مدل از درجه انتزاع بیشتری برخوردار خواهد بود. مدل‌های ریاضی به طور کامل انتزاعی در نمایش رفتار سیستم‌های پیچیده با استفاده از نمادها و سمبول‌های ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مدل‌های ریاضی:

❖ موقعیت‌های پیچیده قابل تعریف هستند. ❖ قابلیت شبیه‌سازی زمان عملیات واقعی وجود دارد.

❖ دستکاری و ایجاد تغییرات در مدل بسیار ساده است. ❖ هزینه آزمایش و خطا بسیار کم می‌باشد.

❖ در نظر گرفتن عدم قطعیت و محاسبه ریسک در آن ممکن است. ❖ شرایط آموزش و یادگیری را فراهم می‌کند.

❖ استفاده از رایانه در آن باعث کارایی بیشتر مدل می‌گردد. ❖ سیستم‌های هوشمند و یادگیرنده قابل پیاده‌سازی هستند.



ویژگی‌های تحقیق در عملیات – مدل‌ها در OR – انواع مدل ریاضی

مدل‌های ریاضی در OR، از لحاظ نوع متغیرهای مدل، معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند.

۱ – قطعی: مقدار متغیرهای مدل کاملاً مشخص است.

۲ – احتمالی: مقدار متغیرهای مدل نامعین و تصادفی است.

۳ – ترکیبی: در مدل از هر دو نوع متغیر قطعی و احتمالی وجود دارد.

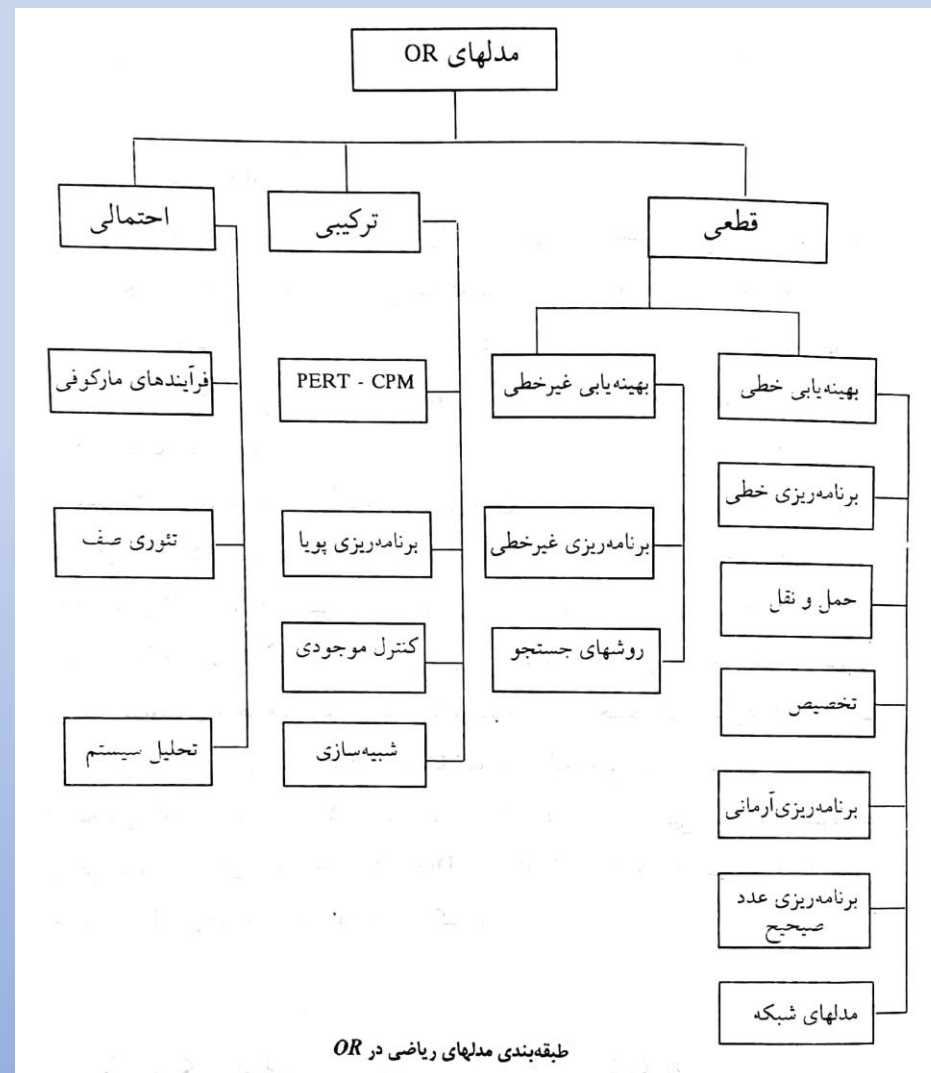
همچنین مدل‌های ریاضی در OR، از لحاظ تابع هدف یا محدودیت‌های مدل، به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱ – خطی: کلیه روابط موجود در تابع هدف و محدودیت‌های مدل خطی (از درجه اول) هستند.

۲ – غیرخطی: حداقل یکی از روابط موجود در تابع هدف یا محدودیت‌های مدل غیرخطی است.



ویژگی‌های تحقیق در عملیات - مدل‌ها در OR - انواع مدل ریاضی





ویژگی‌های تحقیق در عملیات – کاربرد رایانه

پیشرفت بسیار سریع رایانه در عصر حاضر از یک سو و توسعه فنون و تکنیک‌های ریاضی در حل مدل‌های ریاضی در OR از سوی دیگر باعث شده که به طور گسترده و چشمگیری از رایانه‌ها در حل مسایل تحقیق در عملیات استفاده شود و نرم‌افزارهای حرفه‌ای و قدرتمندی برای حل این مسایل، ساخته شوند. از جمله این نرم‌افزارها می‌توان به LINGO، LINDO، GAMS، QSB و . . . اشاره کرد.

البته در بسیاری از نرم‌افزارهای عمومی مانند EXCEL و MATLAB نیز ابزارهایی برای حل مدل‌های ریاضی و به خصوص مدل‌های برنامه‌ریزی خطی وجود دارد که در این دوره آموزشی به آن‌ها خواهیم پرداخت.



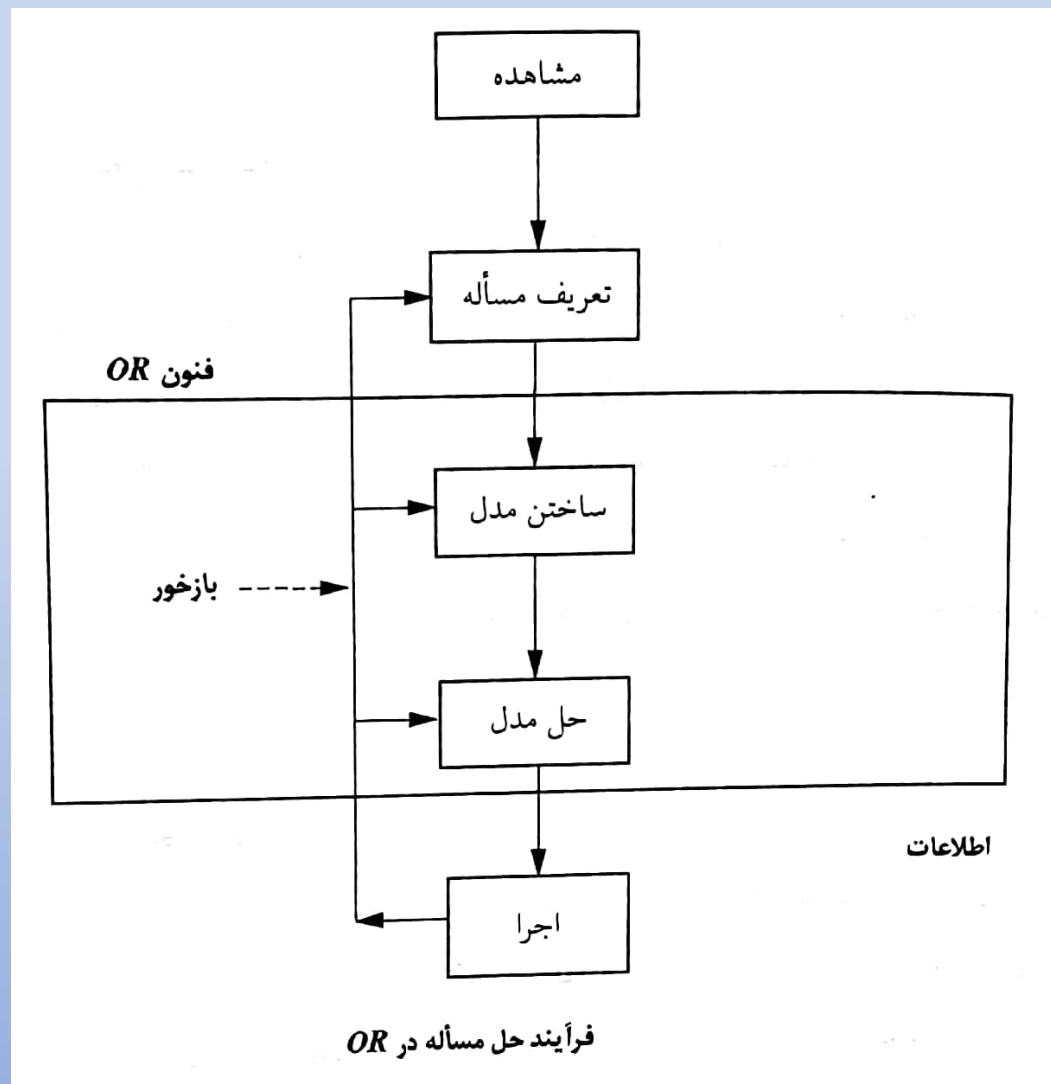
فصل دوم

برنامه‌ریزی خطی و مدل سازی

Linear Programing & Modeling



رویکرد تحقیق در عملیات برای حل مساله





مقدمه

پیچیدگی و پویایی محیط سازمان‌ها شرایط تصمیم‌گیری برای مدیران را سخت می‌کنند. لذا همواره نیاز به ابزارهای کارآمدی داریم که در این مسیر تسهیل‌گر و حتی در برخی مواقع راهنمای مدیران باشد. مدل‌سازی ریاضی و تکنیک‌های OR از مهمترین ابزارهای مورد استفاده مدیران برای انتخاب راه‌حل بهینه با توجه به محدودیت‌های مساله می‌باشد.

یکی از فنون پرکاربرد OR که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد، برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و در آن تابع هدف که با توجه به متغیرهای موثر در تصمیم‌گیری باید بهینه شود و همه روابط معرف محدودیت‌های مدل از نوع خطی هستند.

با توجه به سادگی حل مسایل برنامه‌ریزی خطی، همواره تلاش می‌کنیم در تعریف مساله و تبدیل آن به یک مدل ریاضی، طوری عمل کنیم که حل آن با تکنیک برنامه‌ریزی خطی ممکن باشد.



مدل سازی دنیای واقعی در قالب مسایل برنامه ریزی خطی

همانطور که می دانیم، مدل ریاضی، ساده شده واقعیت است و به طور کامل انتزاعی معرف رفتار سیستم واقعی می باشد. طبیعی است که اگر بخواهیم مدل به مساله واقعی نزدیکتر باشد باید عوامل یا متغیرهای بیشتری که در تصمیم گیری انتخاب راه حل بهینه موثر هستند و همچنین محدودیت های تعیین کننده بیشتری از مسال واقعی که ناشی از سیاست گذاری ها یا منابع هستند را مد نظر قرار دهیم. هر مدل ریاضی از متغیرهای تصمیم، روابط معرف محدودیت ها، تابع هدف و پارامترهای مساله (مقادیر ثابت در مساله) تشکیل شده است.

برای ساخت یک مدل ریاضی، ابتدا متغیرهای تصمیم را تعریف می کنیم. سپس تابع هدف را بر حسب این متغیرها فرمول بندی می کنیم و در نهایت با استفاده از متغیرهای تصمیم و پارامترهای مساله، روابط معرف محدودیت های مساله را می نویسیم.



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله ترکیب تولید

شرکتی می‌خواهد بداند که از هریک از سه محصولش چقدر تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع، به حداکثر سود نائل شود.

منابع مورد نیاز				
منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار در دسترس
نیروی کار (ساعت/واحد)	۵	۲	۴	۲۴۰ ساعت
مواد اولیه (کیلوگرم/واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلوگرم
سهم سود هر واحد	۳	۵	۲	--

متغیرهای تصمیم:

مقدار تولید از محصول ۱: x_1 ، مقدار تولید از محصول ۲: x_2 و مقدار تولید از محصول ۳: x_3

تابع هدف: $\max Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

محدودیت‌های مدل:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله رژیم غذایی

مدیر یک هتل درصدد تهیه یک برنامه غذایی برای صبحانه میهمانان خود می‌باشد. مدیر هتل در تلاش است که صبحانه در عالی‌ترین شکل دارای کالری، کلسیم، پروتئین و فیبر باشد و چربی و کلسترول آن در حد پایینی باشد. همچنین وی درصدد حداقل کردن کل هزینه صبحانه است.

در این برنامه غذایی لازم است حداقل دارای ۴۲۰ کالری، ۵ میلی‌گرم آهن، ۴۰۰ میلی‌گرم کلسیم، ۲۰ گرم پروتئین و ۱۲ گرم فیبر وجود داشته باشد. در ضمن میزان چربی موجود بیشتر از ۲۰ گرم و میزان کلسترول بیشتر از ۳۰ میلی‌گرم نباشد.

با توجه به جدول داده‌های مربوط به برنامه صبحانه هتل که در اسلاید بعدی آمده است، مدل ریاضی مساله برای ارائه یک برنامه غذایی مطلوب که هزینه آن حداقل باشد را بنویسید.



ادامه مساله رژيم غذايی

ردیف	نام غذا	کالری	چربی (g)	کلسترول (mg)	آهن (mg)	کلسیم (mg)	پروتئين (g)	فیبر (g)	هزینه (ریال)
۱	آرد بادام (فنجان)	۹۰	۰	۰	۶	۲۰	۳	۵	۱۸۰
۲	آرد برنج (فنجان)	۱۱۰	۲	۰	۴	۴۸	۴	۲	۲۲۰
۳	سوپ جو (فنجان)	۱۰۰	۲	۰	۲	۱۲	۵	۳	۱۰۰
۴	پنیر (قاچ)	۹۰	۲	۰	۳	۸	۶	۴	۱۲۰
۵	تخم مرغ (عدد)	۷۵	۵	۲۷۰	۱	۳۰	۷	۰	۱۰۰
۶	گوشت گوسفند (قاچ)	۳۵	۳	۸	۰	۰	۲	۰	۹۰
۷	پرتغال (عدد)	۶۵	۰	۰	۱	۲۵	۱	۱	۴۰
۸	شیر (فنجان)	۱۰۰	۴	۱۲	۰	۲۵۰	۹	۰	۱۶۰
۹	آب انار (فنجان)	۱۲۰	۰	۰	۰	۳	۱	۰	۵۰۰
۱۰	نان برشته (قاچ)	۶۵	۱	۰	۱	۲۶	۳	۳	۷۰



ادامه مساله رژیم غذایی

متغیرهای تصمیم:

تعداد فنجان آرد بادام: X_1 ، تعداد فنجان آرد برنج: X_2 ، تعداد فنجان سوپ جو: X_3 ، تعداد قاچ پنیر: X_4 ، تعداد تخم مرغ: X_5 ،
تعداد قاچ گوشت گوسفند: X_6 ، تعداد پرتغال: X_7 ، تعداد فنجان شیر: X_8 ، تعداد فنجان آب انار: X_9 ، تعداد قاچ نان برشته: X_{10} .

تابع هدف:

$$Min Z = 180X_1 + 220X_2 + 100X_3 + 120X_4 + 100X_5 + 90X_6 + 40X_7 + 160X_8 + 500X_9 + 70X_{10}.$$

محدودیت‌های مدل:

$$90X_1 + 110X_2 + 100X_3 + 90X_4 + 75X_5 + 35X_6 + 65X_7 + 100X_8 + 120X_9 + 65X_{10} \geq 420$$

$$2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 5X_5 + 3X_6 + 4X_8 + X_{10} \leq 20$$

$$270X_5 + 8X_6 + 12X_8 \leq 30$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 3X_4 + X_5 + X_7 + X_{10} \geq 5$$

$$20X_1 + 48X_2 + 12X_3 + 8X_4 + 30X_5 + 25X_7 + 250X_8 + 3X_9 + 26X_{10} \geq 400$$

$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 2X_6 + X_7 + 9X_8 + X_9 + 3X_{10} \geq 20$$

$$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 + X_7 + 3X_{10} \geq 12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10} \geq 0$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله سرمایه‌گذاری

شخصی هفتاد میلیون تومان سرمایه دارد که می‌خواهد در بخش‌های مختلف سرمایه‌گذاری کند. اوراق قرضه با $8/5\%$ بازده سالانه، سپرده بانکی با 5% بازده سالانه، اسناد خزانه با $6/5\%$ بازده سالانه و خرید سهام با 13% بازده سالانه زمینه‌های مختلف سرمایه‌گذاری هستند. برای مدیریت ریسک سرمایه‌گذاری سیاست‌های زیر باید در نظر گرفته شود.

۱- مجموع سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه بیشتر از 20% کل سرمایه نباشد.

۲- مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی بیش از مجموع سرمایه‌گذاری در سه زمینه دیگر نباشد.

۳- مجموع سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه و سپرده بانکی حداقل 30% کل سرمایه باشد.

۴- به منظور ایجاد حاشیه اطمینان نسبت به مجموع سرمایه‌گذاری سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه و خرید سهام $1/2$ به ۱ باشد.

۵- سرمایه‌گذار مایل است همه پول خود را در این چهار زمینه سرمایه‌گذاری کند

مدل ریاضی سرمایه‌گذاری در زمینه‌های مختلف با هدف حداکثر شدن کل بازده سالانه را بنویسید.



ادامه مساله سرمایه‌گذاری

متغیرهای تصمیم:

مبلغ سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه: X_1 ، مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی: X_2 ، مبلغ سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه: X_3 ، مبلغ سرمایه‌گذاری در سهام: X_4

تابع هدف: $Max Z = 0.085X_1 + 0.05X_2 + 0.065X_3 + 0.13X_4$

محدودیت‌های مدل:

$$X_1 \leq 14,000,000$$

$$X_2 \leq X_1 + X_3 + X_4$$

$$X_2 + X_3 \geq 21,000,000$$

$$\frac{X_2 + X_3}{X_1 + X_4} \geq 1/2$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 70,000,000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

$$X_1 \leq 14,000,000$$

$$-X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \leq 0$$

$$X_2 + X_3 \geq 21,000,000$$

$$-1/2X_1 + X_2 + X_3 - 1/2X_4 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 70,000,000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله تبلیغات

یک فروشگاه زنجیره‌ای برای بالا بردن فروش خود، درصدد است که تبلیغات را در سطح وسیعی برنامه‌ریزی کند. جدول زیر نشان‌دهنده گزینه‌های موجود برای فروشگاه است.

وسيله تبليغات	تعداد بازديد تبليغ	هزينه (ميليون تومان)
آگهی در تلویزیون	۲۰,۰۰۰	۱۵۰
آگهی در رادیو	۱۲,۰۰۰	۶۰
آگهی در روزنامه	۹,۰۰۰	۴۰

محدودیت‌های فروشگاه عبارتند از:

- ۱ – کل بودجه تبلیغات ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان است.
- ۲ – مجوز تعداد تبلیغ در تلویزیون حداکثر چهار نوبت است.
- ۳ – مجوز تعداد تبلیغات در رادیو حداکثر ۱۰ نوبت است.
- ۴ – مجوز تعداد آگهی در روزنامه ۷ نوبت است.
- ۵ – مجموع آگهی‌های تبلیغاتی نباید بیشتر از ۱۵ نوبت باشد.

مساله را به صورت یک مدل ریاضی بنویسید.



ادامه مساله تبليغات

متغيرهاي تصميم:

تعداد آگهي در تلويزيون: x_1 ، تعداد آگهي در راديو: x_2 ، تعداد آگهي در روزنامه: x_3 .

تابع هدف:

$$Max Z = 20000x_1 + 12000x_2 + 9000x_3$$

محدوديتهاي مدل:

$$150x_1 + 60x_2 + 40x_3 \leq 1000$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_3 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله حمل و نقل

یک شرکت حمل و نقل درصدد حمل تلویزیون‌های تولیدی سه کارخانه به سه شهر مختلف است. عرضه ماهانه هر کارخانه، تقاضای ماهانه هر شهر و هزینه حمل و نقل از هر کارخانه به هر شهر در جدول زیر آمده است. مدل ریاضی مساله را به گونه‌ای بنویسید که ضمن برآورده شدن تقاضای هر شهر، هزینه حمل و نقل در مجموع حداقل باشد.

ظرفیت تولید هر کارخانه	اهواز (۳)	بوشهر (۲)	شیراز (۱)	کارخانه / شهر
۳۰۰	۱۱	۱۸	۱۶	کارخانه تهران (۱)
۲۰۰	۱۳	۱۲	۱۴	کارخانه اراک (۲)
۲۰۰	۱۷	۱۵	۱۳	کارخانه اصفهان (۳)
	۲۰۰	۲۵۰	۱۵۰	میزان تقاضای هر شهر



ادامه مساله حمل و نقل

متغیرهای تصمیم:

تعداد تلویزیون حمل شده از کارخانه ۱، ۲ و ۳ به شهر ۱، ۲ و ۳ را با نماد x_{ij} نمایش می‌دهیم که به این ترتیب ۹ متغیر تصمیم از $x_{۱۱}$ تا $x_{۳۳}$ خواهیم داشت.

تابع هدف:

$$\text{Min } Z = ۱۶x_{۱۱} + ۱۸x_{۱۲} + ۱۱x_{۱۳} + ۱۴x_{۲۱} + ۱۲x_{۲۲} + ۱۳x_{۲۳} + ۱۳x_{۳۱} + ۱۵x_{۳۲} + ۱۷x_{۳۳}$$

محدودیت‌های مدل:

$$x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \leq ۳۰۰$$

$$x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \leq ۲۰۰$$

$$x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳} \leq ۲۰۰$$

$$x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \geq ۱۵۰$$

$$x_{۱۲} + x_{۲۲} + x_{۳۲} \geq ۲۵۰$$

$$x_{۱۳} + x_{۲۳} + x_{۳۳} \geq ۲۰۰$$

$$x_{ij} \geq ۰, i = ۱, ۲, ۳ \quad j = ۱, ۲, ۳$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله امتزاج

یک شرکت نفتی سه نوع سوخت اتومبیل را از ترکیب سه ماده خام نفتی تولید می‌کند. پالایشگاه می‌خواهد به گونه‌ای ترکیب بهینه مواد خام در هر نوع سوخت را پیدا کند که سود خالص خود را حداکثر نماید. محدودیت‌های پالایشگاه عبارتند از:

درجه سوخت	مشخصات ترکیب	قیمت فروش هر بشکه (دلار)
۱	حداقل ۵۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۳۰٪ از ماده ۲	۲۳
۲	حداقل ۴۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۲۵٪ از ماده ۳	۲۰
۳	حداقل ۶۰٪ از ماده ۱ حداکثر ۱۰٪ از ماده ۲	۱۸

ماده خام	حداکثر موجودی روزانه (بشکه)	هزینه هر بشکه (دلار)
۱	۴۵۰۰	۱۲
۲	۲۷۰۰	۱۰
۳	۳۵۰۰	۱۴

همچنین شرکت می‌خواهد ۳۰۰۰ بشکه از هر درجه‌ای از سوخت اتومبیل تولید کند.



ادامه مساله امتزاج

متغیرهای تصمیم:

تعداد بشکه‌ای که از ماده خام ۱، ۲ و ۳ در سوخت درجه ۱، ۲ و ۳ استفاده می‌شود را با نماد x_{ij} نمایش می‌دهیم که به این ترتیب ۹ متغیر تصمیم از x_{11} تا x_{33} خواهیم داشت.

تابع هدف:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 23(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 20(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 18(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \\ & - 12(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 14(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z = 11x_{11} + 13x_{21} + 9x_{31} + 8x_{12} + 10x_{22} + 6x_{32} + 6x_{13} + 8x_{23} + 4x_{33}$$



ادامه مساله امتزاج

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 4500, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2700, \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 3500$$

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 0.50 \Rightarrow 0.50x_{11} - 0.50x_{21} - 0.50x_{31} \geq 0$$

$$\frac{x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 0.30 \Rightarrow -0.30x_{11} + 0.70x_{21} - 0.30x_{31} \leq 0$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 0.40 \Rightarrow 0.60x_{12} - 0.40x_{22} - 0.40x_{32} \geq 0$$

$$\frac{x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leq 0.25 \Rightarrow -0.25x_{12} - 0.25x_{22} + 0.75x_{32} \leq 0$$

$$\frac{x_{13}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geq 0.60 \Rightarrow 0.40x_{13} - 0.60x_{23} - 0.60x_{33} \geq 0$$

$$\frac{x_{23}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leq 0.10 \Rightarrow -0.10x_{13} + 0.90x_{23} - 0.10x_{33} \leq 0$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 3000, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 3000, \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 3000$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$$

محدودیت‌های مدل:



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله زمان‌بندی چند دوره‌ای

شرکت تولید کننده رایانه‌های شخصی درصدد تهیه برنامه زمان‌بندی برای تولید محصولات خود است. ظرفیت عادی تولید برای شرکت ۱۶۰ رایانه در هفته است. همچنین توانایی تولید ۵۰ رایانه در نوبت اضافه‌کاری در شرکت وجود دارد. هزینه مونتاز، بازرسی و بسته‌بندی هر رایانه در حالت عادی، ۱،۹۰۰،۰۰۰ تومان و در نوبت اضافه‌کاری ۲،۶۰۰،۰۰۰ تومان می‌باشد. همچنین هزینه نگهداری هر رایانه در انبار برای تحویل در هفته آینده، ۱۰۰،۰۰۰ تومان می‌باشد.

تعداد سفارش رایانه	هفته
۱۰۵	۱
۱۷۰	۲
۲۳۰	۳
۱۸۰	۴
۱۵۰	۵
۲۵۰	۶

جدول مقابل تعداد سفارشات رایانه را برای ۶ هفته آینده نشان می‌دهد. شرکت می‌خواهد سفارشات مشتریان را در زمان مقرر تامین نماید و هیچیک از مشتریان خود را از دست ندهد. مدل ریاضی مساله را به گونه‌ای بنویسید که ضمن حداقل شدن هزینه‌های تولید و انبارداری، برنامه زمانی لازم برای تولید در ظرفیت عادی و اضافه‌کاری ارائه شود به طوریکه موجودی انبار در پایان هفته ششم صفر گردد. (تعداد تولید در ظرفیت عادی و اضافه‌کار هر هفته طوری تعیین گردد که ضمن برآورده شدن سفارش مشتریان، هزینه تولید و انبارداری حداقل گردد.)



ادامه مساله زمان بندی چند دوره‌ای

متغیرهای تصمیم:

$R_j: (j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$

$O_j: (j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$

$I_j: (j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$

تعداد تولید رایانه در هفته زام در ظرفیت عادی :

تعداد تولید رایانه در هفته زام در ظرفیت اضافه کار:

تعداد رایانه مازاد که در هفته زام در انبار نگهداری می‌شود:

تابع هدف:

$$\text{Min } Z = ۱,۹۰۰,۰۰۰ \sum_{j=۱}^۶ R_j + ۲,۶۰۰,۰۰۰ \sum_{j=۱}^۶ O_j + ۱۰۰,۰۰۰ \sum_{j=۱}^۵ I_j$$

محدودیت‌های مدل:

$$R_j \leq ۱۶۰ \quad (j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$$

$$O_j \leq ۵۰ \quad (j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$$

$$R_۱ + O_۱ - I_۱ \geq ۱۰۵$$

$$R_۲ + O_۲ + I_۱ - I_۲ \geq ۱۷۰$$

$$R_۳ + O_۳ + I_۲ - I_۳ \geq ۲۳۰$$

$$R_۴ + O_۴ + I_۳ - I_۴ \geq ۱۸۰$$

$$R_۵ + O_۵ + I_۴ - I_۵ \geq ۱۵۰$$

$$R_۶ + O_۶ + I_۵ \geq ۲۵۰$$

$$R_j, O_j, I_j \geq ۰$$



مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله ترکیب محصولات کشاورزی

کشاورزی دارای زمینی است که مساحت آن ۲۰۰۰ هکتار است و در آن سه قطعه تفکیک شده به مساحت‌های ۵۰۰، ۸۰۰ و ۷۰۰ هکتاری وجود دارد. این زمین مناسب برای کشت هر سه نوع محصول ذرت، پیاز و لوبیا است که در هر کدام از سه قطعه قابل کشت هستند. با توجه به جدول زیر، مدل ریاضی مساله را به گونه‌ای بنویسید که
اولاً حداقل ۶۰٪ هر قطعه زمین زیر کشت برود.

ثانیاً در هر سه قطعه زمین نسبت مساحت زیر کشت به کل مساحت مساوی باشد.

ثالثاً سود کشاورز حداکثر شود

محصول	حداکثر سطح قابل کشت (هکتار)	سود هر هکتار (تومان)
ذرت (۱)	۹۰۰	۶۰۰،۰۰۰
پیاز (۲)	۷۰۰	۴۵۰،۰۰۰
لوبیا (۳)	۱۰۰۰	۳۰۰،۰۰۰



ادامه مساله ترکیب محصولات کشاورزی

متغیرهای تصمیم:

$x_{ij} :$ ($i = ۱, ۲, ۳$; $j = ۱, ۲, ۳$)

مساحت زیر کشت محصول i در قطعه زمین j :

تابع هدف:

$$Max Z = ۶۰۰,۰۰۰(x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳}) + ۴۵۰,۰۰۰(x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳}) + ۳۰۰,۰۰۰(x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۳})$$



ادامه مساله تركيب محصولات کشاورزی

محدودیت‌های مدل:

$$\begin{aligned} 0.6 \times 500 \leq x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 500 &\Rightarrow x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 500 \\ &x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.6 \times 800 \leq x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 800 &\Rightarrow x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 800 \\ &x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.6 \times 700 \leq x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 700 &\Rightarrow x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 700 \\ &x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 420 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 900 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 700 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1000 \end{aligned}$$

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31}}{500} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32}}{800} \Rightarrow 800 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 500 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 0$$

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31}}{500} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33}}{700} \Rightarrow 700 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 500 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3 \ ; \ j = 1, 2, 3)$$



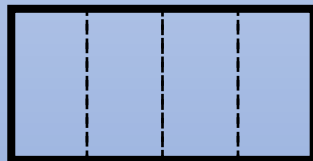
مثال‌های کاربردی از مدل‌سازی – مساله برش چوب

یک کارگاه برش چوب سفارشی مطابق جدول زیر دریافت کرده است. این سفارشات از تخته‌های استاندارد به ابعاد ۱۸۰ در ۳۶۰ سانتیمتر تامین خواهند شد. مدل ریاضی مساله را به گونه‌ای بنویسید که حداقل پرت (دور ریز) تخته را داشته باشیم.

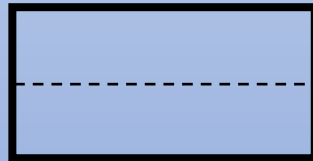
مقدار سفارش	ابعاد چوب‌های سفارش شده
۱۳۰۰	۹۰ در ۱۸۰ سانتیمتر
۱۰۰۰	۹۰ در ۳۶۰ سانتیمتر
۷۰۰	۱۸۰ در ۱۸۰ سانتیمتر

متغیرهای تصمیم:

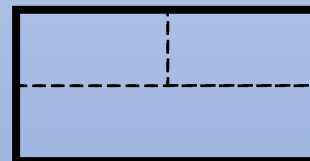
به پنج روش یک تخته استاندارد را می‌توان برای سفارشات برش داد. تعداد تخته‌های استاندارد استفاده شده از روش i : x_i ($i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$)



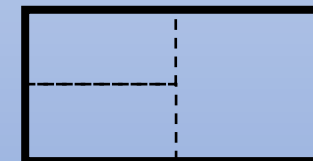
x_1



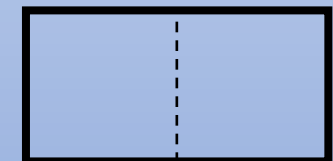
x_2



x_3



x_4



x_5



ادامه مساله برش چوب

تابع هدف: $Min Z = x_1 + x_2 + x_3$

محدودیت‌های مدل: $4x_1 + 2x_3 + 2x_4 \geq 1300$

$$2x_2 + x_3 \geq 1000$$

$$x_4 + 2x_5 \geq 700$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



مدل عمومی برنامه ریزی خطی LP

$$\text{Max}(\text{Min}) Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_jx_j + \dots + C_nx_n$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n (\leq = \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n (\leq = \geq) b_2$$

$\vdots$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n (\leq = \geq) b_i$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n (\leq = \geq) b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

در این مدل مقادیر x_j متغیرهای تصمیم هستند.

مقادیر C_j ، a_{ij} و b_i پارامترهای مدل LP و به ترتیب

ضرایب تابع هدف، ضرایب فنی و مقادیر سمت راست مدل

نام دارند.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

مقدمه:

برنامه‌ریزی خطی از سال ۱۹۴۱ ضمن تحقیقات اقتصاددان معروف لئونتیف (Leontief) همراه شد و تا سال ۱۹۴۷ در زمینه‌های مختلفی همچون حمل و نقل (Transportation) و میزان مواد لازم در رژیم غذایی (Diet Problem) مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۴۷ ریاضی‌دان مشهور جرج دنتزیگ (George D. Dantzig) به اتفاق همکارانش در حل یکی از پروژه‌های ارتش آمریکا، روشی سیستماتیک به نام سیمپلکس (Symplex) را به وجود آورد و باعث شد برنامه‌ریزی خطی به طور چشمگیری در مسیر پیشرفت قرار بگیرد.

در حل مسایل با کمک برنامه‌ریزی خطی باید اولاً مساله بگونه‌ای تعریف شود که با استفاده از فن برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد؛ ثانیاً مساله در قالب یک مدل ریاضی فرمول‌بندی شود و ثالثاً مدل با استفاده از فن ریاضی قطعی و معین، قابل حل باشد.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

مفروضات مدل برنامه‌ریزی خطی (LP Assumptions):

- ۱- تناسب (Proportionality): هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت‌ها عمل می‌کند. یعنی هر یک از متغیرها چه در تابع هدف و چه در محدودیت‌ها متناسب با سطح فعالیت (مقدار) متغیر می‌باشد.
- ۲- جمع‌پذیری (Additivity): در تابع هدف و محدودیت‌ها مجموع متغیرها (با ضرایب مربوط) وجود دارند و در هیچ‌کدام از محدودیت‌ها یا تابع هدف، شاهد ضرب دو یا چند متغیر در هم نخواهیم بود.
- ۳- بخش‌پذیری (Divisibility): هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است. لذا متغیرهای تصمیم می‌توانند مقادیر غیر صحیح داشته باشند.
- ۴- معین بودن (Deterministic): تمام پارامترهای مدل (b_i ، a_{ij} ، C_j) مقادیری ثابت و غیر احتمالی هستند. البته در دنیای واقعی با توجه به اینکه مسایل مربوط به آینده می‌باشند، این مقادیر احتمالی بوده و بنابراین لازم است بعد از حل، تحلیل حساسیت انجام دهیم.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

واژگان متداول در مدل برنامه‌ریزی خطی (LP Common Words)

۱- جواب (Solution): هر مجموعه‌ای از مقادیر متغیرهای تصمیم، جواب نام دارد.

۲- جواب موجه (Feasible Solution): جوابی که در همه محدودیت‌های مساله صدق کند.

۳- جواب غیرموجه (Unfeasible Solution): جوابی که حداقل در یکی از محدودیت‌های مساله صدق نکند.

۴- جواب بهینه (Optimal Solution): جواب موجهی که به ازای آن تابع هدف به حداکثر مطلوبیت برسد.

۵- معادله حدی (Boundary Equation): معادله‌ای که با تبدیل علامت نامساوی در هر محدودیت به مساوی به وجود می‌آید.

۶- منطقه موجه (Feasible Region): مجموعه همه جواب‌های موجه در یک مساله، منطقه موجه نام دارد.

۷- جواب گوشه (Corner Point Solution): جوابی که از تقاطع حداقل دو معادله حدی به وجود می‌آید، جواب گوشه نام دارد.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

روش ترسیمی یکی از ساده‌ترین روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی است که تنها برای مسایل با دو متغیر (یا حداکثر سه متغیر) کاربرد دارد و در آن به یک درک شهودی از چگونگی حل مساله برنامه‌ریزی خطی می‌رسیم. همچنین بسیاری از مفاهیم مسایل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان در این روش به سادگی تعریف کرد تا با تعمیم آن در حالتی که تعداد متغیرهای تصمیم زیاد می‌شوند، درک بهتری از مساله به وجود آید.

در این روش به کمک رسم معادلات حدی که از محدودیت‌های مدل به دست می‌آیند، ناحیه موجه را مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به امتداد تابع هدف، جواب بهینه را به دست می‌آوریم.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

مثال: کارخانه‌ای درصدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع در جدول زیر داده شده است.

سود (هزار تومان)	منابع مورد نیاز		محصول
	مواد اولیه (کیلوگرم)	نیروی کار (نفر-ساعت)	
۴۰	۴	۱	۱
۵۰	۳	۲	۲

متغیرهای تصمیم: x_1 تعداد تولید از محصول نوع ۱ و x_2 تعداد تولید از محصول نوع ۲

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

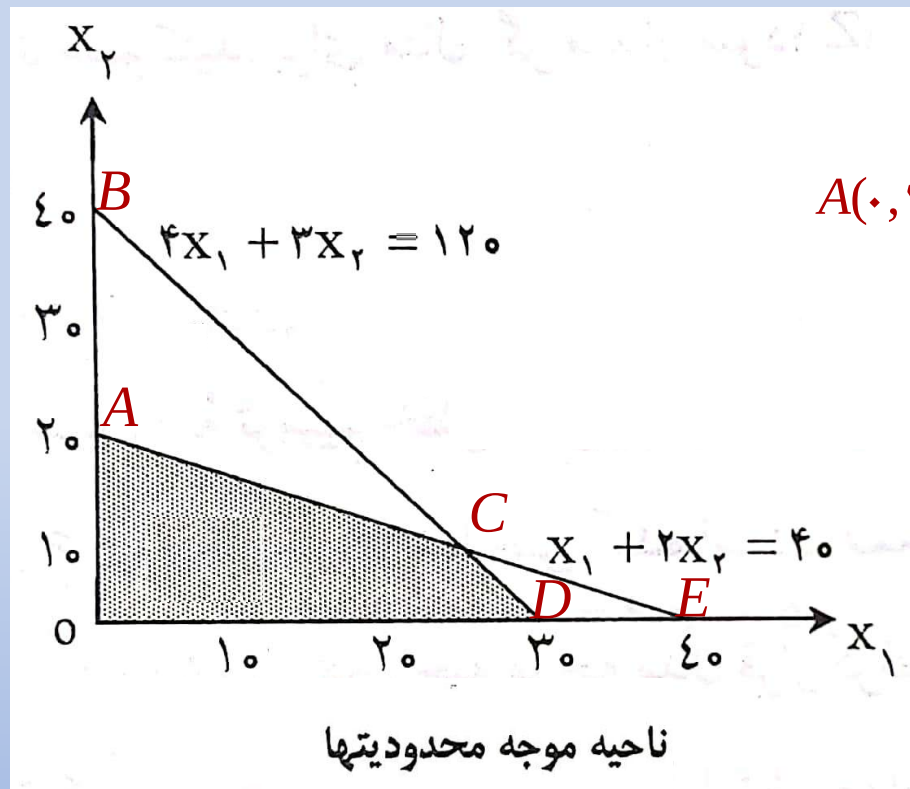
تابع هدف: حداکثرسازی سود ناشی از تولید.

محدودیت‌های مدل: حداکثر نیروی کار ۴۰ نفر ساعت

و حداکثر مواد اولیه ۱۲۰ کیلوگرم می‌باشد.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

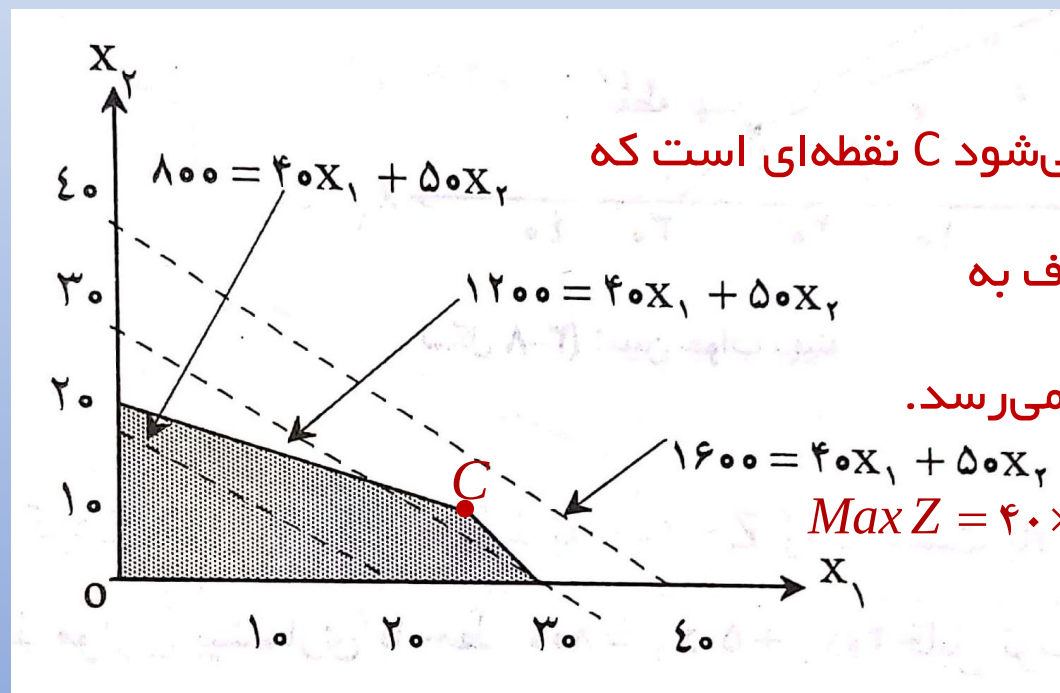


پاسخ مثال: مختصات نقاط گوشه که از تقاطع دو به دوی معادلات حدی

به وجود می‌آیند، عبارتند از: $A(0, 20)$, $B(0, 40)$, $C(24, 8)$, $D(30, 0)$, $E(40, 0)$

حال امتداد تابع هدف را به ازای مقادیر $Z=1600$ و $Z=1200$, $Z=800$

رسم می‌کنیم.





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

خواص اساسی جواب‌های گوشه:

خاصیت ۱: جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی، قطعا یکی از جواب‌های گوشه موجه است.

خاصیت ۲: تعداد جواب‌های گوشه موجه متناهی است.

اگر در مساله برنامه‌ریزی خطی تعداد m محدودیت و n متغیر تصمیم وجود داشته باشد، هر جواب گوشه از تقاطع n معادله حدی به دست می‌آید. از طرفی می‌دانیم تعداد معادلات حدی در چنین مساله‌ای برابر $m+n$ می‌باشد. حال تعداد

جواب‌های گوشه برابر انتخاب n معادله از $m+n$ معادله حدی می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید.
$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m! n!}$$
 در مثال فوق تعداد جواب‌های گوشه برابر است با:
$$\binom{2+2}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

خاصیت ۳: چنانچه یک جواب گوشه موجه از تمام جواب‌های گوشه مجاور خود (از لحاظ مقدار تابع هدف) بهتر باشد، در این صورت از تمام جواب‌های گوشه موجه مساله بهتر است. (یعنی جواب بهینه است).



حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی

مثال (حداقل سازی مقدار تابع هدف):

مراحل حل ترسیمی دقیقاً مانند قبل است.

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

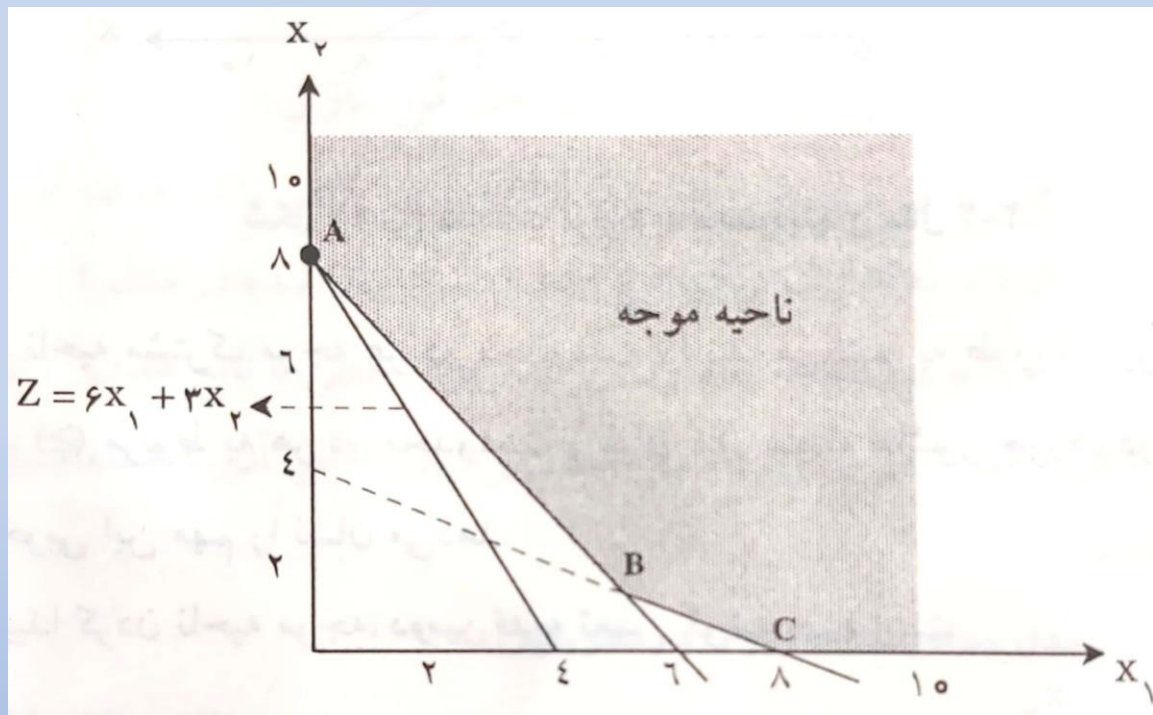
$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

همانطور که مشاهده می شود نقطه A جواب بهینه مساله می باشد.

$$A(0, 8)$$

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2 = 6 \times 0 + 3 \times 8 = 24$$





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

بررسی موارد خاص در برنامه‌ریزی خطی:

هنگام حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی ممکن است به یکی از چهار حالت خاص برخورد کنیم که عبارتند از:

۱ – جواب بهینه چندگانه (Multiple Optimal Solution)

۲ – فاقد ناحیه موجه (Infeasible Solution)

۳ – ناحیه جواب بی‌کران (Unbounded Solution)

۴ – جواب تبهگن (Degenerate Solution)



حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی

۱- جواب بهینه چندگانه (Multiple Optimal Solution):

مثال:

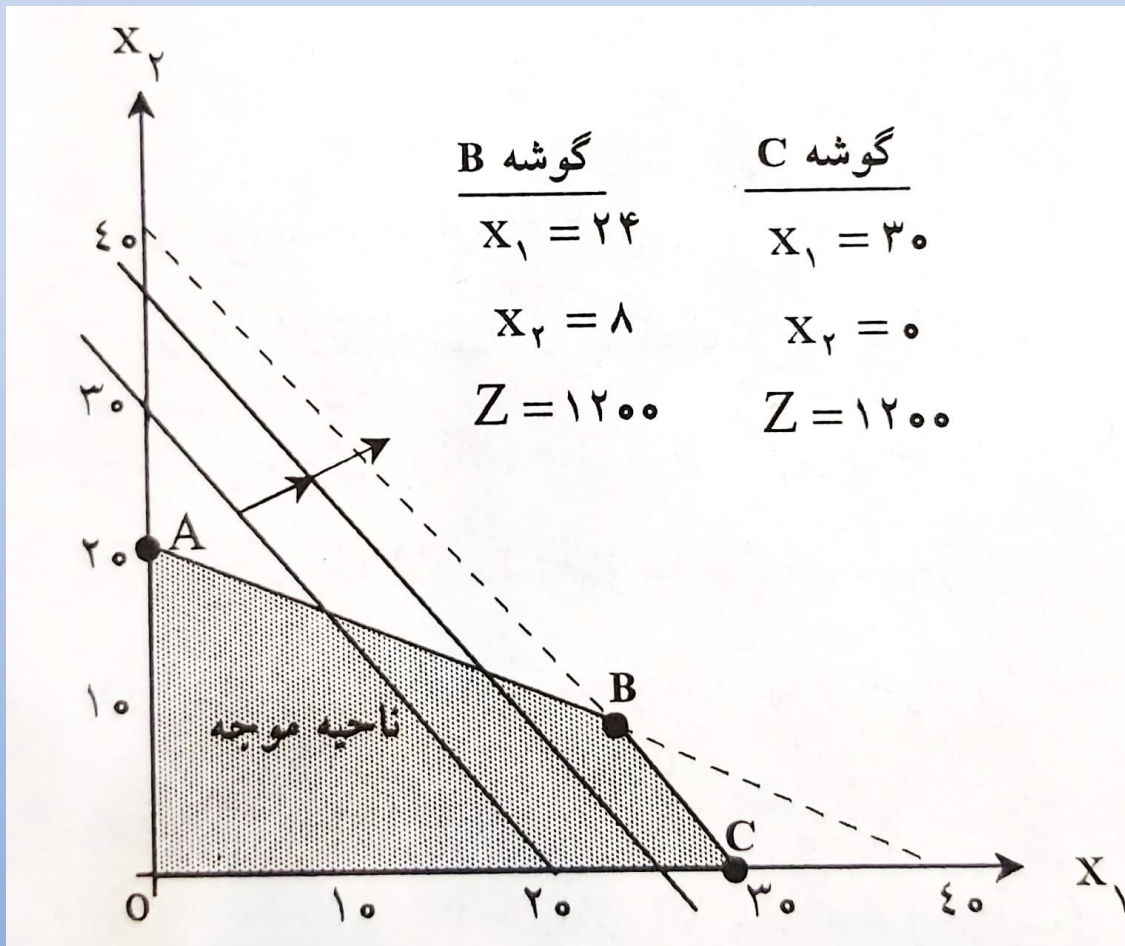
$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

Subject to:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی

۲- فاقد ناحیه موجه (Infeasible Solution):

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

مثال:

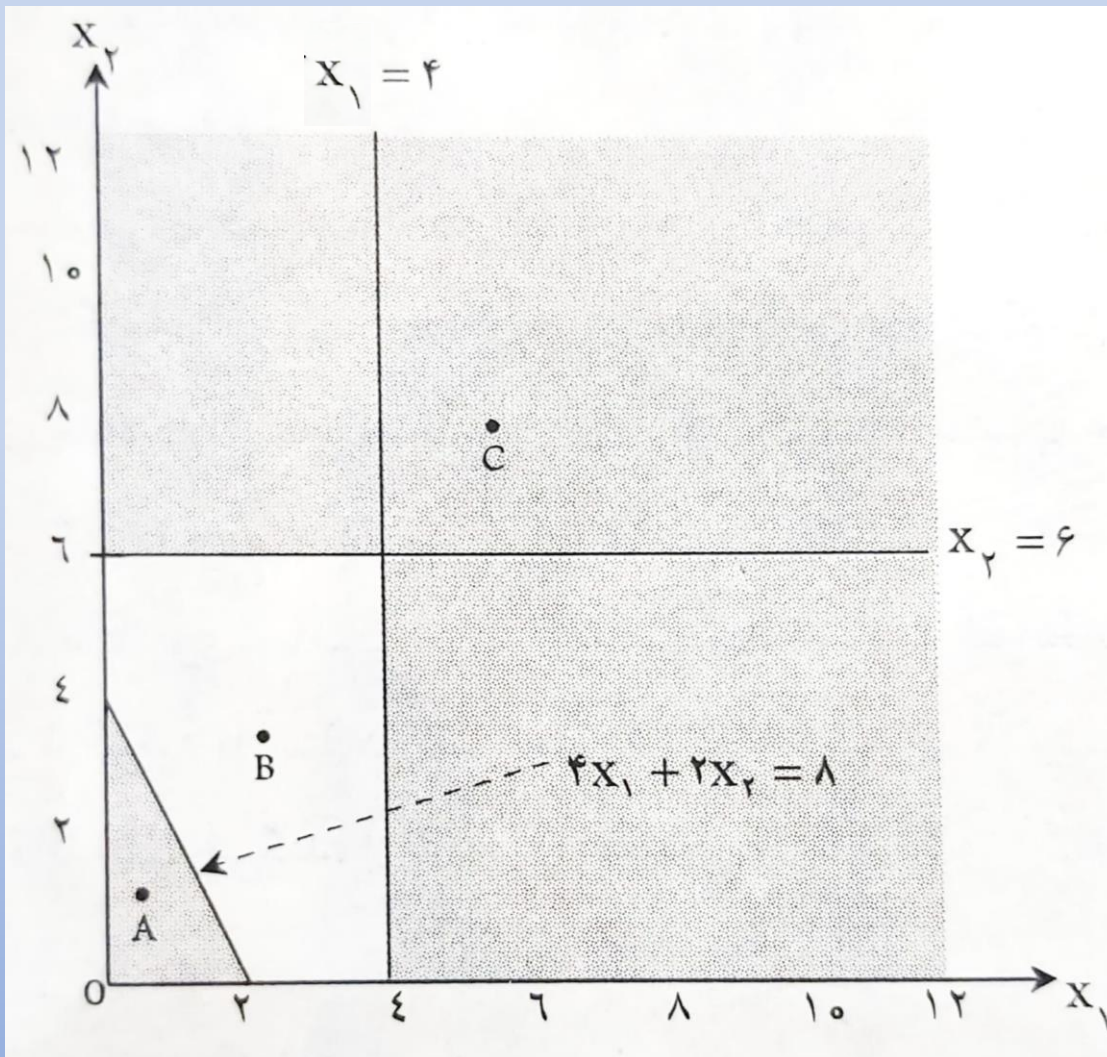
Subject to:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی

۳- ناحیه جواب بی کران (Unbounded Solution):

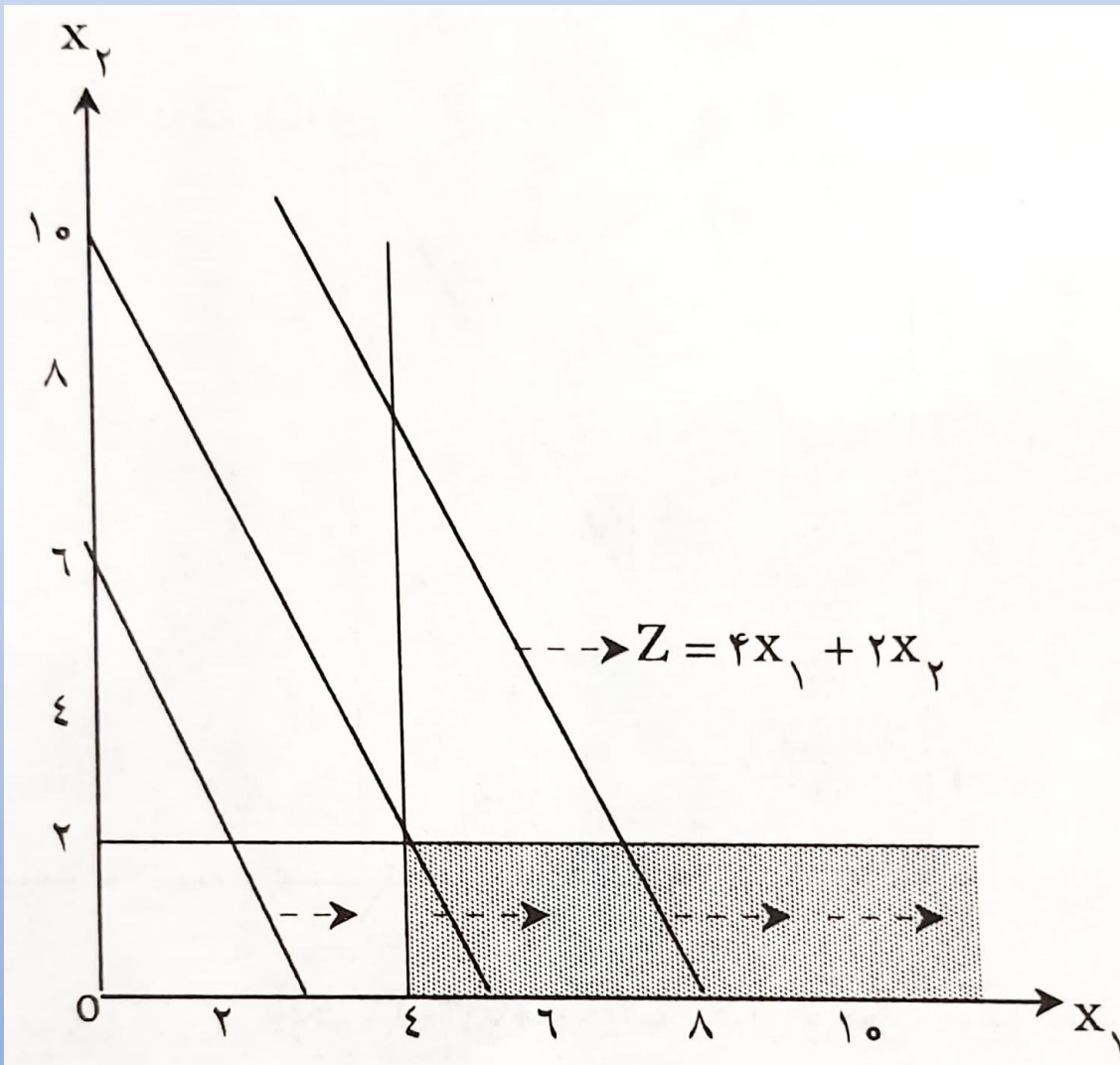
مثال: (بدون جواب بهینه) $Max Z = 4x_1 + 2x_2$

Subject to:

$$x_1 \geq 4$$

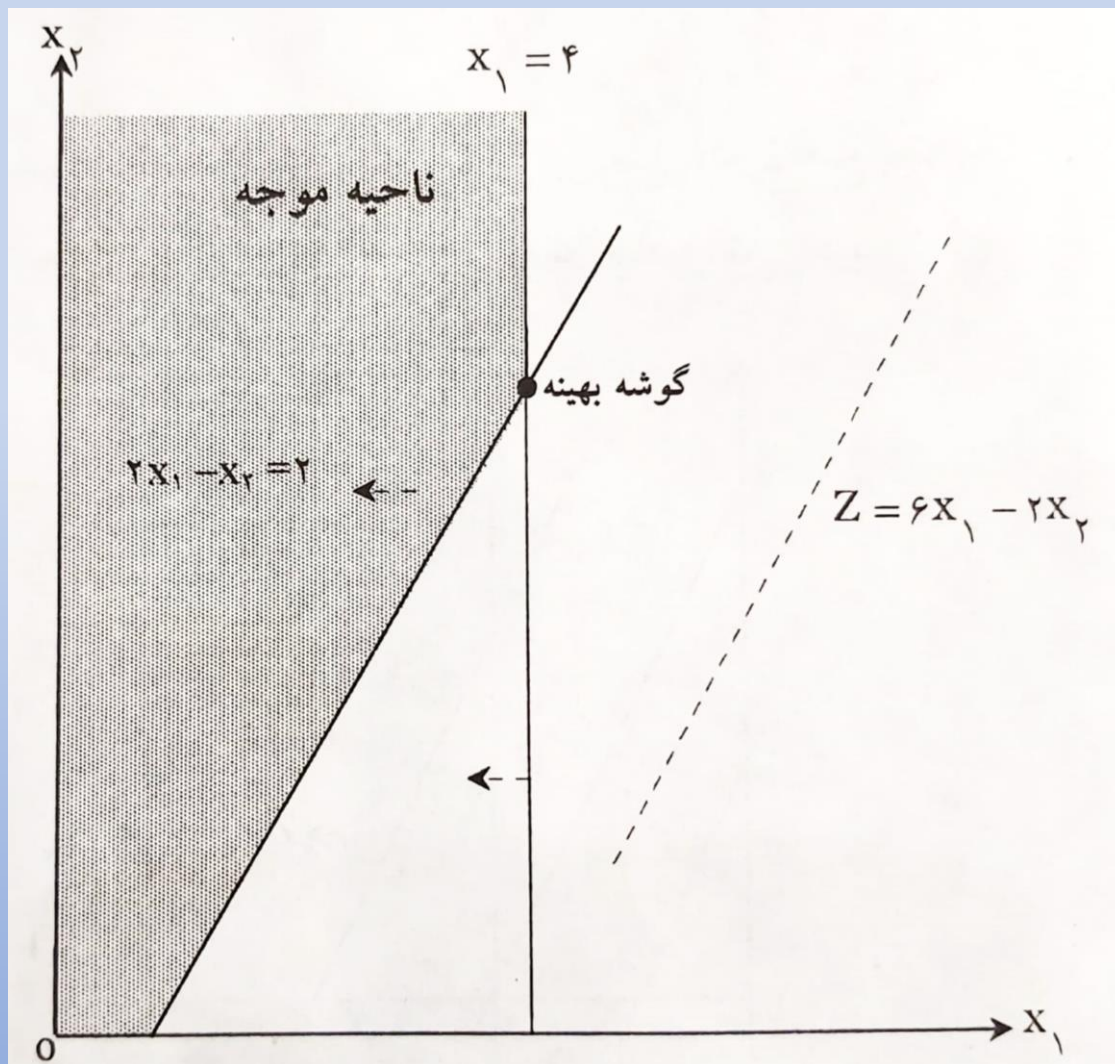
$$4x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$





حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی



۳- ناحیه جواب بی کران (Unbounded Solution):

مثال: (با جواب بهینه) $Max Z = 6x_1 - 2x_2$

Subject to:

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گوشه بهینه: $A(4, 6)$

$$Max Z = 6x_1 - 2x_2 = 6 \times 4 - 2 \times 6 = 12$$



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش ترسیمی

۴- جواب تبهگن (Degenerate Solution):

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$

مثال:

Subject to:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

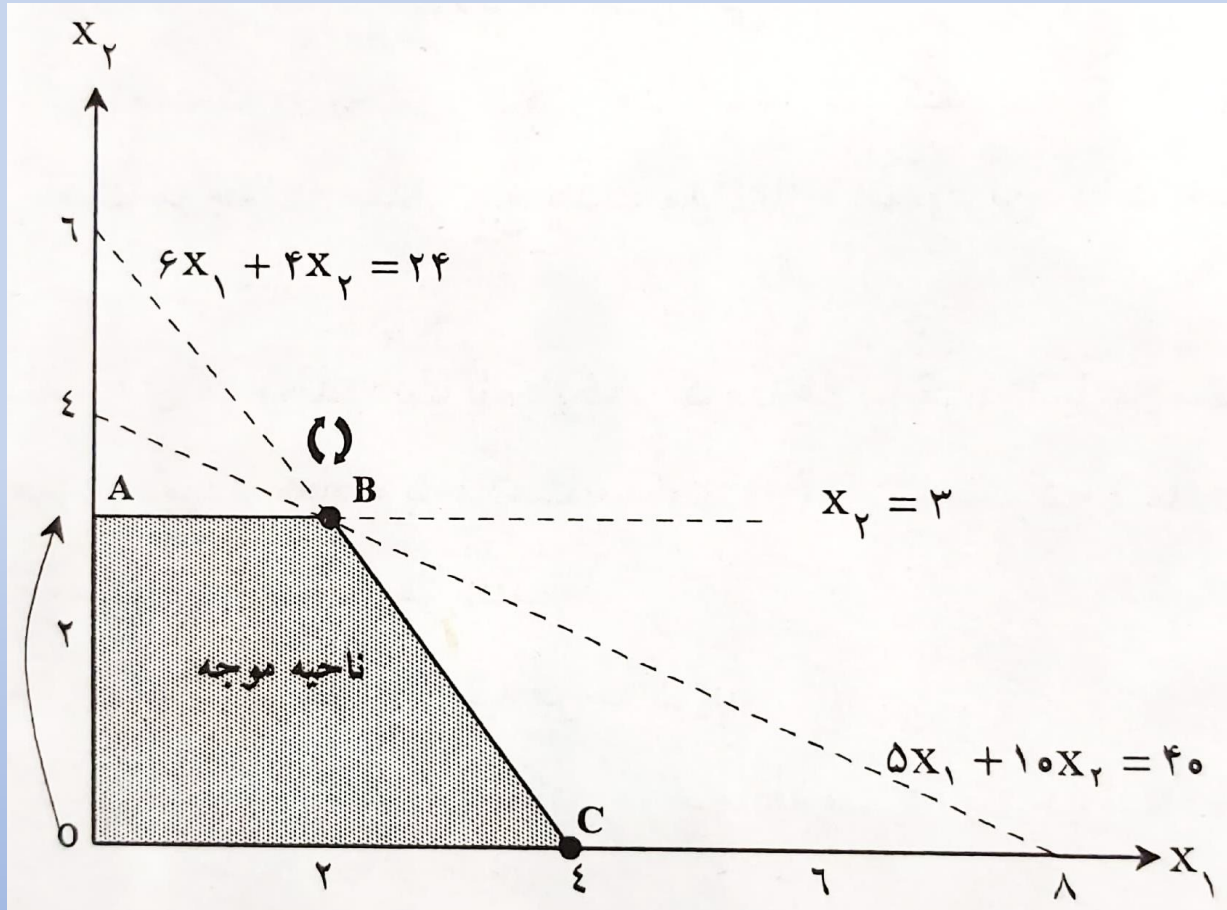
$$x_1 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گوشه B از محل برخورد بیش از دو معادله حدی

به دست آمده است.



در حالت کلی مدل برنامه‌ریزی خطی که دارای گوشه تبهگن (بهینه تبهگن یا موجه تبهگن) باشد، مدل تبهگن نامیده می‌شود.



فصل چهارم

حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

مدل برنامه‌ریزی خطی استاندارد:

روش سیمپلکس برای حل نوع خاصی از مسایل برنامه‌ریزی خطی که در اینجا آن را استاندارد می‌نامیم، تنظیم شده است. لذا قبل از معرفی روش سیمپلکس باید ابتدا به معرفی مدل برنامه‌ریزی خطی استاندارد بپردازیم و پس از آن به چگونگی تبدیل یک مدل برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد اشاره کنیم.

مدل برنامه‌ریزی خطی استاندارد، مدلی است که در آن تابع هدف از نوع ماکزیمم (Max) و تمام محدودیت‌های آن به صورت مساوی ($=$) هستند.

برای تبدیل محدودیت‌های به شکل کوچکتر مساوی به فرم استاندارد از متغیرهای کمبود و برای تبدیل محدودیت‌های بزرگتر مساوی از متغیرهای مازاد استفاده می‌کنیم.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

مثال ۱: مدل زیر مربوط به تولید دو نوع محصول با دو محدودیت نیروی کار و مواد اولیه با هدف ماکزیمم کردن سود را در نظر

می‌گیریم.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

Subject to:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

با اضافه کردن متغیرهای کمبود به هر یک از محدودیت‌ها، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120$$

با فرض تولید ۵ واحد از محصول اول و ۱۰ واحد از محصول دوم خواهیم داشت:

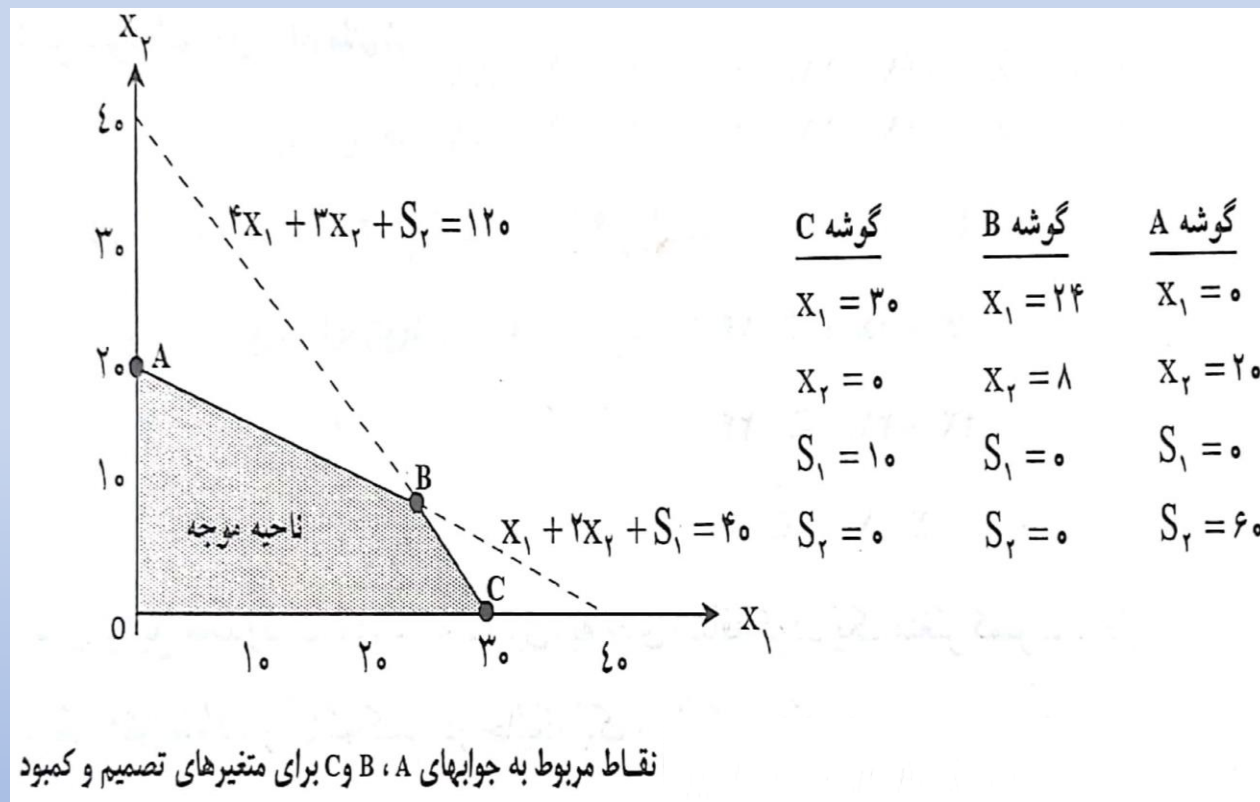
$$x_1 = 5, x_2 = 10 \Rightarrow 5 + 20 + s_1 = 40 \Rightarrow s_1 = 15$$

$$x_1 = 5, x_2 = 10 \Rightarrow 20 + 30 + s_2 = 120 \Rightarrow s_2 = 70$$

بنابراین متغیرهای کمبود مربوط به منابع مصرف نشده می‌باشند. (۱۵ ساعت نیروی کار و ۷۰ کیلوگرم ماده اولیه)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



مدل استاندارد مثال ۱ به صورت زیر می‌باشد.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

همانطور که مشاهده می‌شود روی مرز محدودیت اول که مربوط به

ساعت کار است تمام منابع مصرف شده و در نتیجه $S_1 = 0$ ،

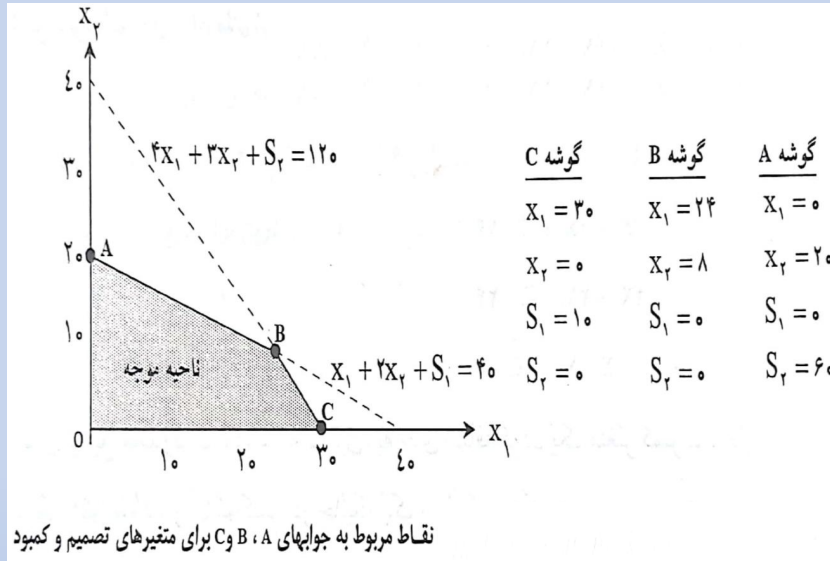
همچنین روی مرز محدودیت دوم که مربوط به مواد اولیه است

تمام منابع مصرف شده و در نتیجه $S_2 = 0$. در گوشه O (مبدأ مختصات) مقادیر x_1 و x_2 برابر صفر و در نتیجه در این گوشه همه منابع

باقیمانده‌اند زیرا هنوز تولیدی صورت نگرفته تا منبعی مصرف گردد. $(x_1 = 0, x_2 = 0, S_1 = 40, S_2 = 120)$



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



$$Max Z = 40x_1 + 50x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

جواب موجه و جواب موجه اساسی:

همانطور که می‌دانیم جواب موجه به جوابی گفته می‌شود که در همه محدودیت‌های مدل

صدق کند. در مدلی که دارای n متغیر و m محدودیت باشد، m+n متغیر در فرم استاندارد

وجود خواهد داشت. (n متغیر تصمیم و m متغیر کمکی)

جواب موجهی که در آن m متغیر دارای مقدار بزرگتر از صفر و n متغیر (m+n-m=n) آن برابر صفر باشند را یک جواب موجه اساسی

می‌نامیم. این جواب همانطور که در مثال فوق دیده می‌شود از حل همزمان محدودیت‌های مدل به دست می‌آیند. به عبارت دیگر نقاط گوشه‌ای

که در مرز ناحیه موجه قرار می‌گیرند (نقاط گوشه موجه)، جواب موجه اساسی مدل هستند. در این مثال علاوه بر نقاط A، B و C نقطه O (مبدأ

مختصات) نیز یک جواب اساسی موجه می‌باشد. ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $S_1 = 40$, $S_2 = 120$)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۲: فرم استاندارد مدل مقابل را بنویسید.

ابتدا برای تبدیل تابع هدف به ماکزیمم کافیست به جای مینیمم Z ، ماکزیمم $-Z$ را بدست آوریم.

به عبارت دیگر طرفین معادله تابع هدف را در منفی ضرب می‌کنیم.

سپس برای تبدیل محدودیت‌های بزرگتر مساوی از متغیر کمکی مازاد استفاده می‌کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

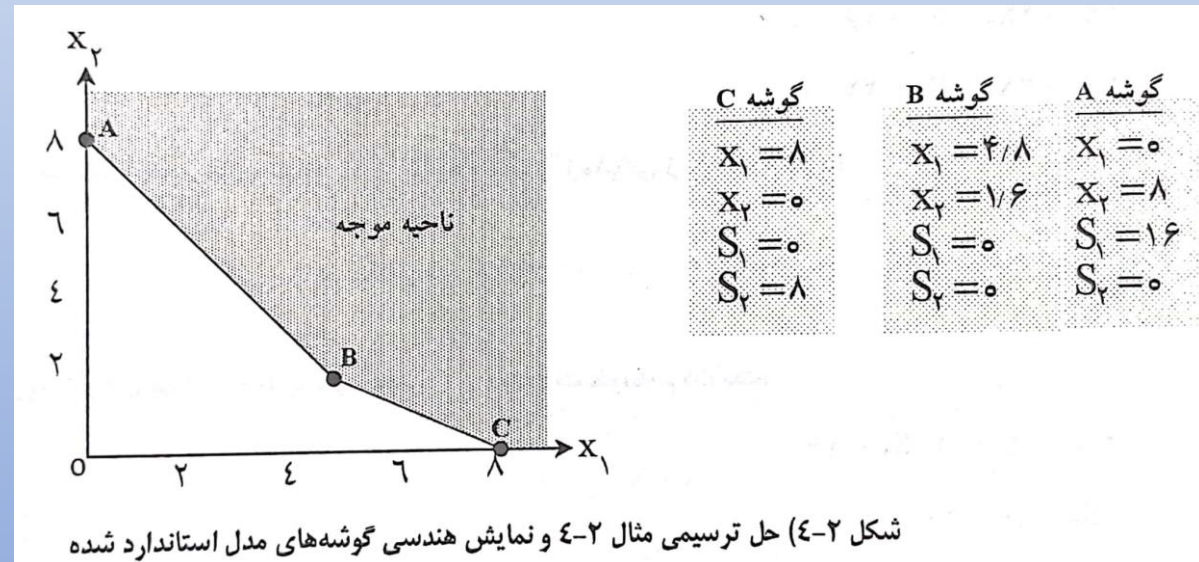
$$\text{Max}(-Z) = -6x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

معرفی روش سیمپلکس:

روش سیمپلکس به مجموعه‌ای از مراحل ریاضی برای حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی استاندارد گفته می‌شود. این مراحل در یک جدول که به تابلوی سیمپلکس معروف است، انجام می‌شود.

در تابلوی سیمپلکس ستون اول مربوط به متغیرهای اساسی، ستون آخر مربوط به مقادیر سمت راست و ستونهای بین این دو مربوط به متغیرهای مدل می‌باشد. به عنوان مثال در مدل استاندارد زیر،

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS

تابلوی سیمپلکس به شکل مقابل خواهد بود. (مثال ۱)

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

پاسخ به دو سوال در روش سیمپلکس:

۱ – برای یافتن جواب بهینه از بین جواب‌های موجه اساسی از کدام نقطه باید شروع کرد؟

در روش سیمپلکس همواره از مبدا مختصات (نقطه‌ای که متغیرهای تصمیم صفر هستند و مقدار متغیرهای کمکی برابر مقدار سمت راست محدودیت مربوط می‌باشد) شروع می‌کنیم.

۲ – چگونه جواب بهینه تشخیص داده می‌شود؟

در روش سیمپلکس حرکت از هر گوشه موجه اساسی به سمت گوشه مجاور اساسی به شرطی صورت می‌گیرد که باعث بهبود در مقدار تابع هدف شود. به این ترتیب اگر به یک گوشه موجه اساسی برسیم که از گوشه‌های اساسی مجاور خود بهتر باشد، یعنی حرکت از آن گوشه به هر یک از گوشه‌های مجاور باعث بهبود در مقدار تابع هدف نشود، آن گوشه همان جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خواهد بود.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی در یک مدل در هر تابلوی سیمپلکس، همان متغیرهای غیر صفر در گوشه موجه اساسی هستند که در ستون اول تابلوی سیمپلکس نوشته می‌شوند. با توجه به اینکه در روش سیمپلکس همواره از مبدا مختصات شروع می‌کنیم و در این نقطه متغیرهای تصمیم همگی صفر هستند و تنها متغیرهای کمکی مقدار غیر صفر دارند، نتیجه می‌گیریم که متغیرهای اساسی در تابلوی اولیه سیمپلکس همان متغیرهای کمکی خواهند بود. برای تعیین ضرایب متغیرها در هر سطر نیز از معادلات محدودیت‌ها استفاده می‌کنیم. در سطر اول نیز با جابجا کردن همه جملات به سمت چپ معادله تابع هدف، ضرایب مربوط را می‌نویسیم. (مقدار سمت راست تابع هدف در مبدا مختصات برابر صفر است.)

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

$$Z - 40x_1 - 50x_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

در صورتی که شرکت بخواهد یک واحد از محصول یک تولید کند، ۴۰ واحد سود و در صورتی که بخواهد یک واحد از محصول دو تولید کند، ۵۰ واحد سود خواهیم داشت. در هر یک از این حالتها با حرکت از مبدا باید به سمتی حرکت کنیم که مقدار سود بیشتری عاید شرکت شود. بدیهی است که در این مثال محصول دو به عنوان متغیر اساسی (مقدار غیرصفر) باید وارد تابلوی بعدی سیمپلکس شود و در نتیجه یکی از متغیرهای اساسی تابلوی قبلی باید از تابلوی سیمپلکس خارج شود.

انتخاب متغیر ورودی (ستون لولا) بر اساس منفی‌ترین ضریب در سطر اول (تابع هدف) صورت می‌گیرد. اما برای انتخاب متغیر

خروجی (سطر لولا) کفایت بر اساس کمترین مقدار نسبت

مقادیر سمت راست بر ضرایب مثبت ستون لولا، متغیر خروجی

را انتخاب کنیم. دلیل این مطلب نیز تامین منابع لازم برای تولید

محصولی است که مقدار آن به عنوان متغیر ورودی انتخاب

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

می‌شود. عددی که در تقاطع سطر و ستون لولا قرار می‌گیرد را عدد لولا می‌نامیم.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

در ادامه با توجه به اینکه x_2 به عنوان متغیر ورودی به جای S_1 در ستون اول جزء متغیرهای اساسی قرار خواهد گرفت، باید ترتیبی اتخاذ کنیم که اولاً عدد لولاً برابر ۱ و سایر اعداد ستون لولاً برابر صفر شوند. برای این کار از عملیات مقدماتی سطری استفاده می‌کنیم.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z_0	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

۱- سطر اول را بر عدد ۲ (عدد لولاً) تقسیم می‌کنیم.

۲- ۵۰ برابر سطر اول را به سطر صفر اضافه می‌کنیم.

۳- منهای ۳ برابر سطر اول را به سطر دوم اضافه می‌کنیم.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z_0	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	۰/۵	۱	۰/۵	۰	۲۰
S_2	۰	۲/۵	۰	-۱/۵	۱	۶۰

$$\longrightarrow (x_1 = 0, x_2 = 20, S_1 = 0, S_2 = 60)$$



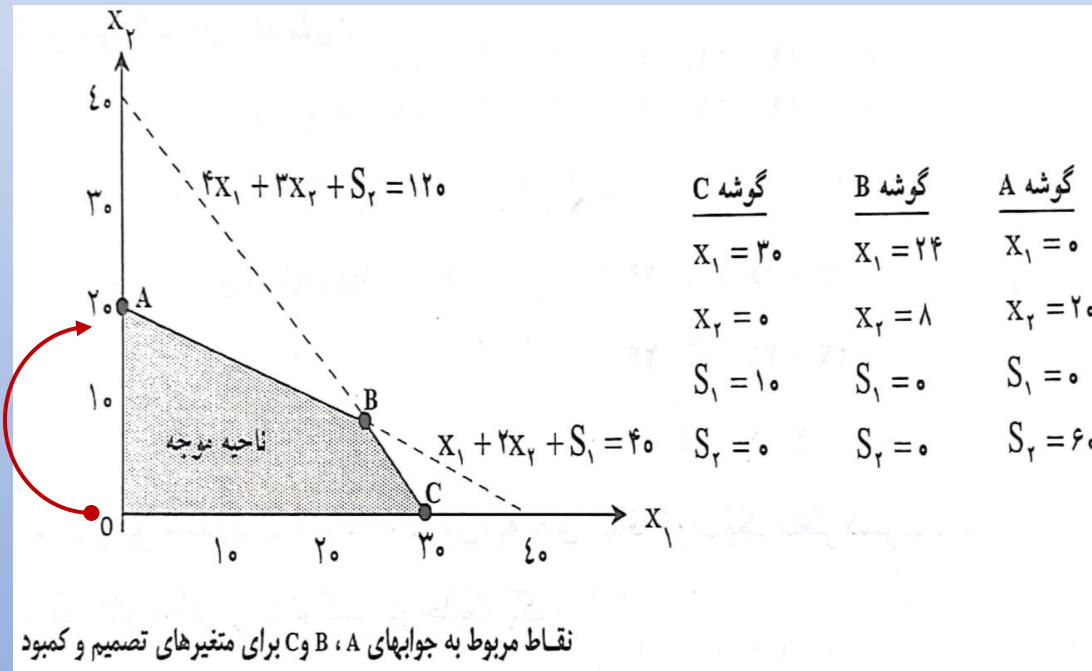
حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	۰/۵	۱	۰/۵	۰	۲۰
S_2	۰	۲/۵	۰	-۱/۵	۱	۶۰

در این تابلو مقدار x_2 برابر ۲۰ و مقدار S_2 برابر ۶۰ و مقدار سایر

متغیرها برابر صفر می‌باشد. در واقع در تابلوی دوم سیمپلکس

از نقطه O (مبدأ مختصات) به گوشه موجه اساسی A حرکت کرده‌ایم.



با توجه به وجود عدد -۱۵ در سطر صفر، متغیر ورودی در تابلوی بعدی x_1

می‌باشد. حال اگر اعداد سمت راست را بر مقادیر مثبت ستون لولا تقسیم

کنیم و کمترین مقدار را انتخاب کنیم، متوجه می‌شویم که متغیر خروجی S_2

خواهد بود و در نتیجه عدد ۲/۵ عدد لولا خواهد بود.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

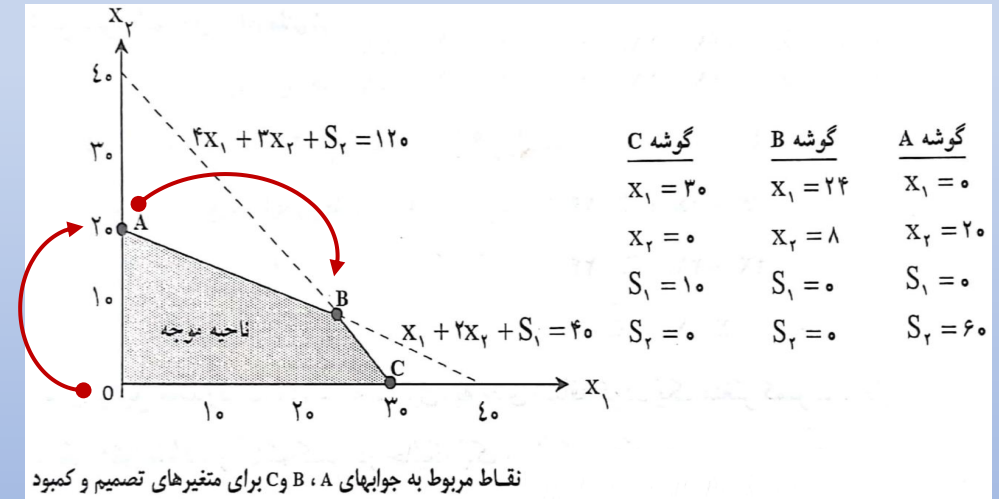
۱- سطر دوم را بر $۲/۵$ تقسیم می‌کنیم.

۲- منهای $۰/۵$ برابر سطر دوم را با سطر اول جمع می‌کنیم.

۳- ۱۵ برابر سطر دوم را با سطر صفر جمع می‌کنیم.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	۰/۵	۱	۰/۵	۰	۲۰
S_2	۰	۲/۵	۰	-۱/۵	۱	۶۰

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	۱	۰	۰	۱۶	۶	۱۳۶۰
x_2	۰	۰	۱	۰/۸	-۰/۲	۸
x_1	۰	۱	۰	-۰/۶	۰/۴	۲۴



با توجه به اینکه در سطر اول (تابع هدف) تابلوی سوم که معرف گوشه B می‌باشد، عدد منفی نداریم، نتیجه می‌گیریم که این تابلوی بهینه مساله و نقطه B به عنوان جواب بهینه خواهد بود. مقدار بهینه تابع هدف نیز در این نقطه برابر ۱۳۶۰ می‌باشد.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

خلاصه مراحل الگوریتم سیمپلکس:

۱- مدل مساله را به فرم استاندارد تبدیل کنید. (تابع هدف از نوع Max و نامعادلات را به معادله تبدیل کنید.)

۲- تابلوی اولیه سیمپلکس را بر اساس جواب موجه اساسی مدل در مبدا مختصات تنظیم کنید.

۳- ستون لولا (متغیر ورودی) را بر اساس منفی‌ترین ضریب سطر صفر (Z_0) تعیین کنید.

۴- سطر لولا (متغیر خروجی) را بر اساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا تعیین کنید.

۵- ضرایب جدید سطر لولا را با تقسیم ضرایب قبلی بر عدد لولا (عددی که در تقاطع سطر و ستون لولا قرار می‌گیرد) بنویسید.

۶- ضرایب جدید سایر سطرها را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنید.

$$(\text{ضرایب جدید سطر لولا}) * (\text{ضریب مربوط در ستون لولا}) - (\text{ضرایب قدیم سطر}) = \text{ضرایب جدید سطر}$$

۷- در صورتی که همه عناصر در سطر صفر (Z_0) نامنفی باشند با جواب بهینه رسیده‌ایم و پایان؛ در غیراین صورت به مرحله ۳ بازمی‌گردیم و عملیات را تکرار می‌کنیم.



حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

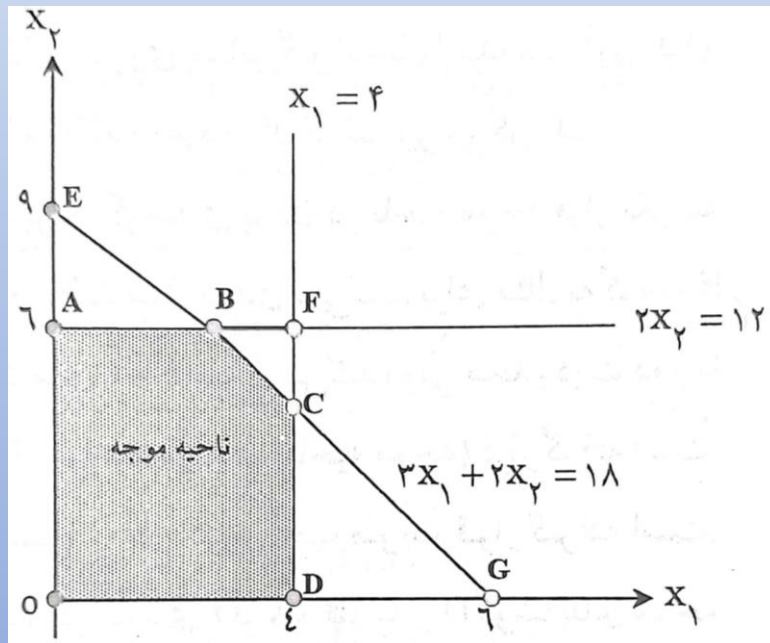
Subject to :

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مثال ۳: با استفاده از روش سیمپلکس مساله برنامه ریزی خطی مقابل را حل کنید.

(الف) معادلات مرزی: با تبدیل محدودیت‌های نامساوی با استفاده از متغیرهای کمکی،

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

معادلات مرزی را به دست می‌آوریم.

(ب) گوشه: جوابی که از تقاطع حداقل دو معادله مرزی به دست می‌آیند.

(نقاط O, A, B, C, D, E, F, G گوشه‌های به وجود آمده در این مثال هستند.)

(ج) گوشه غیر موجه: گوشه‌ای که حداقل در یکی از محدودیت‌های مدل صدق نکند.

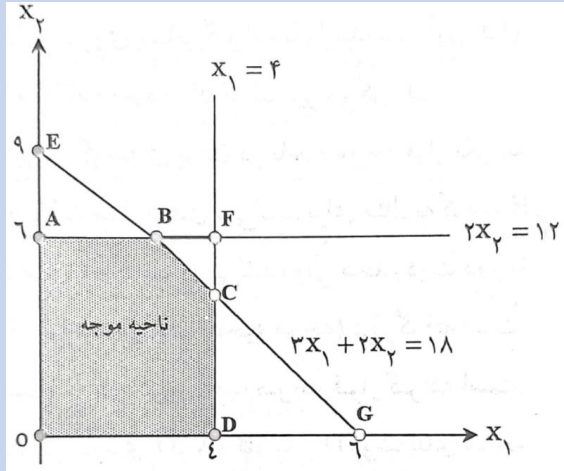
(نقاط E, F, G گوشه‌های غیرموجه در این مثال هستند.)

(د) گوشه موجه (نقاط حدی): گوشه‌هایی که در مرز ناحیه موجه قرار می‌گیرند.

(نقاط O, A, B, C, D گوشه‌های موجه (نقاط حدی در این مثال هستند.)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



ه) گوشه‌های مجاور: اگر دو گوشه روی یک معادله مرزی (معادله معرف) باشند، مجاور هستند.

(نقاط A و B، نقاط B و C، نقاط C و D نمونه‌هایی از گوشه‌های مجاور در این مثال هستند.)

و) مدل استاندارد: مدلی که در آن محدودیت‌ها به شکل مساوی و تابع هدف به شکل Max باشد.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

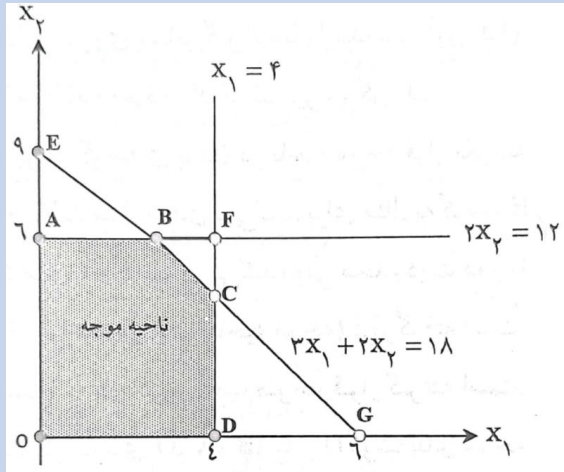
(مدل استاندارد را مدل گسترده نیز می‌نامند.)

ز) جواب اساسی (جواب گسترده): یک جواب گوشه‌ای که شامل متغیرهای تصمیم و متغیرهای کمکی باشد را جواب اساسی

گویند. هر جواب اساسی دارای $m+n$ متغیر است. (n متغیر تصمیم و m متغیر کمکی)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



(ح) جواب اساسی موجه: جواب اساسی (گسترده) یک گوشه موجه، جواب اساسی موجه است.

(همه متغیرهای تصمیم و همه متغیرهای کمکی در یک جواب اساسی موجه، نامنفی هستند.)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

نام گوشه	جواب گوشه (X_1, X_2)	معادلات معرف	جواب اساسی موجه $(X_1, X_2, S_1, S_2, S_3)$	متغیرهای اساسی	متغیرهای غیراساسی	مقدار Z
O	(0, 0)	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	(0, 0, 4, 12, 18)	(S_1, S_2, S_3)	(X_1, X_2)	0
A	(0, 6)	$X_1 = 0$ $2X_2 = 12$	(0, 6, 4, 0, 6)	(S_1, X_2, S_3)	(X_1, S_2)	30
B	(2, 6)	$2X_1 = 12$ $3X_1 + 2X_2 = 18$	(2, 6, 2, 0, 0)	(S_1, X_2, X_1)	(S_2, S_3)	36*
C	(4, 3)	$3X_1 + 2X_2 = 18$ $X_1 = 4$	(4, 3, 0, 6, 0)	(S_2, X_2, X_1)	(S_1, S_3)	27
D	(4, 0)	$X_1 = 4$ $X_2 = 0$	(4, 0, 0, 12, 6)	(S_2, S_3, X_1)	(S_1, X_2)	12



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

متغیرهای غیراساسی	متغیرهای اساسی	جواب اساسی غیرموجه (X_1, X_2, S_1, S_2, S_3)	معادلات معرف	جواب گوشه غیر موجه (X_1, X_2)	گوشه
(X_1, S_3)	(S_1, X_2, S_2)	(0 و 9 و 0 و 6 و 0)	$X_1 = 0$ $3X_1 + 2X_2 = 18$	(0 و 9)	E
(S_1, S_2)	(S_3, X_2, X_1)	(0 و 0 و 6 و 0 و 4)	$X_1 = 4$ $2X_2 = 12$	(4 و 6)	F
(X_2, S_3)	(S_2, S_1, X_1)	(0 و 12 و 2 و 0 و 6)	$X_2 = 0$ $3X_1 + 2X_2 = 18$	(6 و 0)	G

حداقل یکی از متغیرهای کمکی در یک جواب اساسی غیرموجه، منفی است.)

✓ در روش سیمپلکس اگر جواب اساسی موجه نباشد، حداقل یکی از

متغیرهای اساسی منفی خواهد شد و در نتیجه در سمت راست جدول

سیمپلکس مقدار منفی مشاهده خواهد شد.

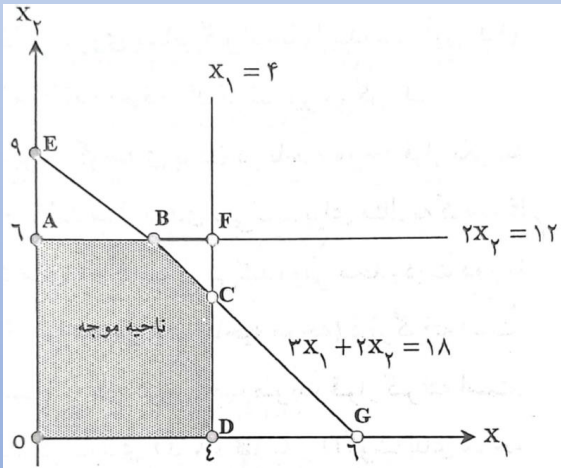
✓ محدودیت‌هایی که نقطه بهینه بر روی معادله مرزی آنها قرار می‌گیرد و

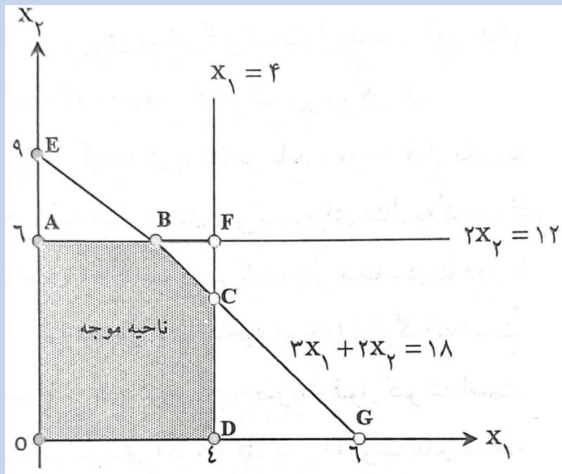
متغیر کمکی آنها مساوی صفر است، به محدودیت‌های فعال معروف هستند.

✓ محدودیتی که در تعریف نقطه بهینه نقشی ندارد و متغیر کمکی آن مقدار مثبت دارد،

به محدودیت غیرفعال معروف است.

➤ محدودیت‌های فعال را الزام‌آور و محدودیت‌های غیرفعال را غیرالزام‌آور نیز می‌گویند.





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

(ط) تعداد جواب‌های گوشه موجه: تعداد جواب‌های گوشه موجه، متناهی است.

در یک مدل با m محدودیت و n متغیر تصمیم، تعداد گوشه‌ها برابر $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ است. (چرا؟)

بنابراین تعداد جواب‌های گوشه موجه حداکثر می‌تواند با تعداد کل گوشه‌های مدل برابر باشد و در نتیجه متناهی است.

از طرف دیگر در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه موجه، به سمت یک گوشه موجه بهتر حرکت می‌کنیم و این نشان می‌دهد بر خلاف روش هندسی، سیمپلکس همه گوشه‌ها را مورد جستجو قرار نمی‌دهد و این موضوع کارایی روش سیمپلکس را نشان می‌دهد. شرط بهینگی (شرط توقف) در الگوریتم سیمپلکس آن است که به گوشه موجهی برسیم که از تمام گوشه‌های موجه مجاور خود بهتر باشد. به این ترتیب در هر تکرار این الگوریتم، به جواب بهینه نزدیک‌تر خواهیم شد.

در این مثال همانطور که در اسلاید بعد مشاهده خواهیم کرد، الگوریتم سیمپلکس به جای بررسی ۵ گوشه موجه، تنها به بررسی ۳ گوشه موجه می‌پردازد. این امر در مثال‌های با ابعاد بزرگ تاثیر زیادی بر کاهش زمان اجرای الگوریتم دارد.



حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to :

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-3	-5	0	0	0	0
S_1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	0	0	2	0	1	0	12
S_3	0	3	2	0	0	1	18
Z_0	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
S_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
S_3	0	3	0	0	-1	1	6
Z_0	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
S_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

ابتدا برای تبدیل تابع هدف به ماکزیمم کافیست به جای مینیمم Z ، ماکزیمم $-Z$ را بدست آوریم. $x_1, x_2 \geq 0$

سپس برای تبدیل محدودیت‌های بزرگتر مساوی از متغیر کمکی مازاد استفاده می‌کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{Max}(-Z) = -6x_1 - 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Subject to :

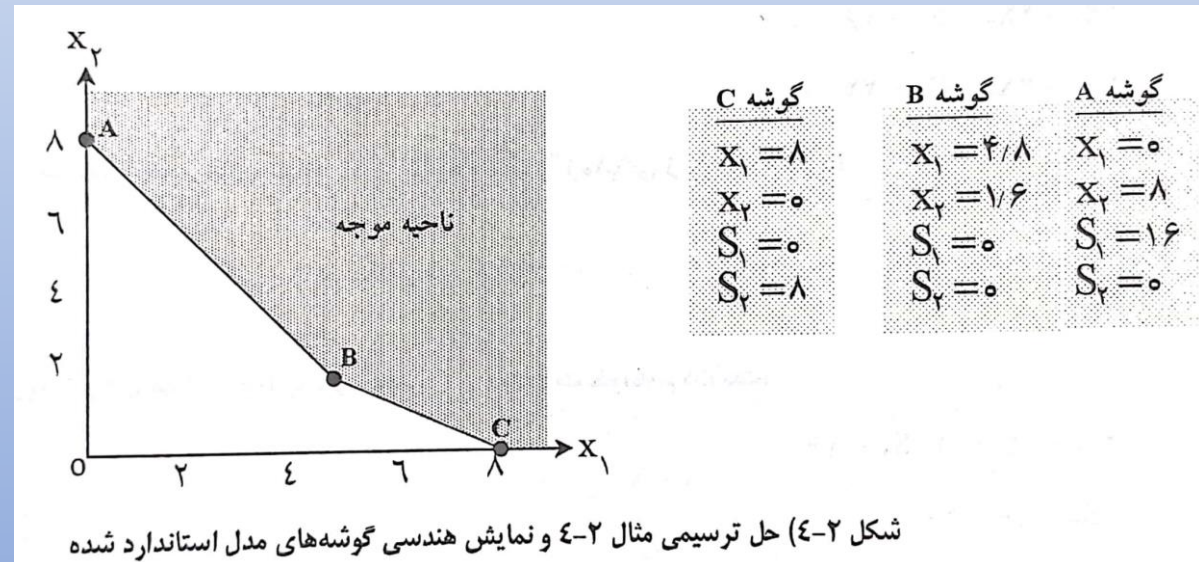
$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

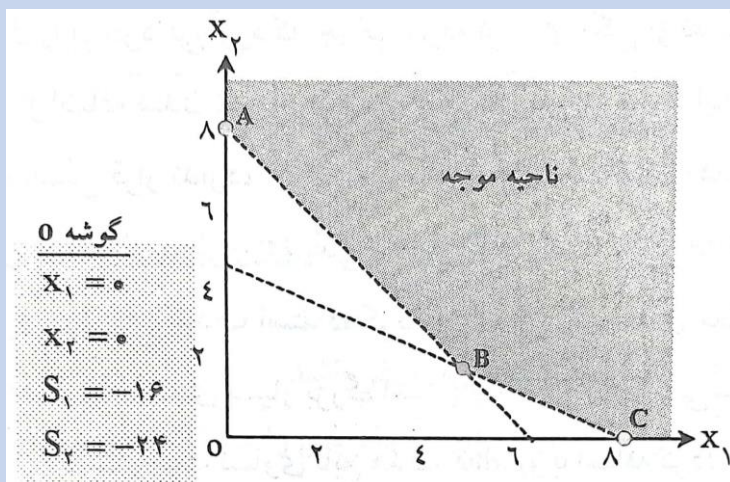
روش سیمپلکس برای حل مساله حداقل سازی:

مدل مطرح شده در مثال ۲ را با استفاده از روش سیمپلکس حل می‌کنیم.





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس



همانطور که مشاهده می‌شود مبدا مختصات خارج از منطقه موجه قرار دارد و این باعث می‌شود که مقادیر متغیرهای کمکی در مبدا مختصات منفی باشد. به این ترتیب متغیرهای کمکی (مازاد)، کارآیی خود را در روش سیمپلکس از دست می‌دهند.

برای حل این مشکل، با استفاده از متغیرهای مصنوعی ناحیه موجه را گسترش می‌دهیم تا شامل مبدا مختصات نیز شود. یعنی به صورت مصنوعی یک جواب موجه اساسی ایجاد می‌کنیم.

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

اما باید ترتیبی اتخاذ کنیم که این متغیرهای مصنوعی به سرعت از جواب مساله حذف شوند. به این منظور جریمه بزرگی به اندازه M برای هر یک از متغیرهای مصنوعی در تابع هدف در نظر می‌گیریم.

(کم کردن MR از سمت راست تابع هدف Max باعث می‌شود که انتخاب متغیر مصنوعی هیچگاه باعث بهبود در تابع هدف نگردد و در نتیجه جزء متغیرهای اساسی قرار نگیرد. به طریق مشابه در تابع هدف Min مقدار MR را به سمت راست تابع هدف اضافه می‌کنیم.)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

به این ترتیب مختصات مبدا به صورت $O(x_1 = 0, x_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, R_1 = 16, R_2 = 24)$

خواهد بود. حال به تشکیل جدول سیمپلکس می‌پردازیم.

Subject to :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست RHS
Z.	-1	6	3	0	0	M	M	0
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

با بررسی دو ویژگی اساسی تابلوی سیمپلکس (۱- ضریب متغیرهای اساسی در سطر صفر مساوی صفر باشد. ۲- ضرایب متغیرهای اساسی آن در محدودیت‌ها تشکیل ماتریس واحد بدهد.)، در می‌یابیم که جدول فوق نمی‌تواند به عنوان تابلوی اول سیمپلکس در نظر گرفته شود. زیرا شرط اول در آن برقرار نیست. معمولاً این جدول را تابلوی مقدماتی می‌نامیم و با عملیات سطری، تغییراتی در آن ایجاد می‌کنیم که به تابلوی اول سیمپلکس برسیم. (هر دو ویژگی برقرار باشد.)



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

منهای M برابر سطر اول و دوم را با سطر صفر جمع می‌کنیم. در این صورت تابلوی اول سیمپلکس به صورت زیر خواهد بود.

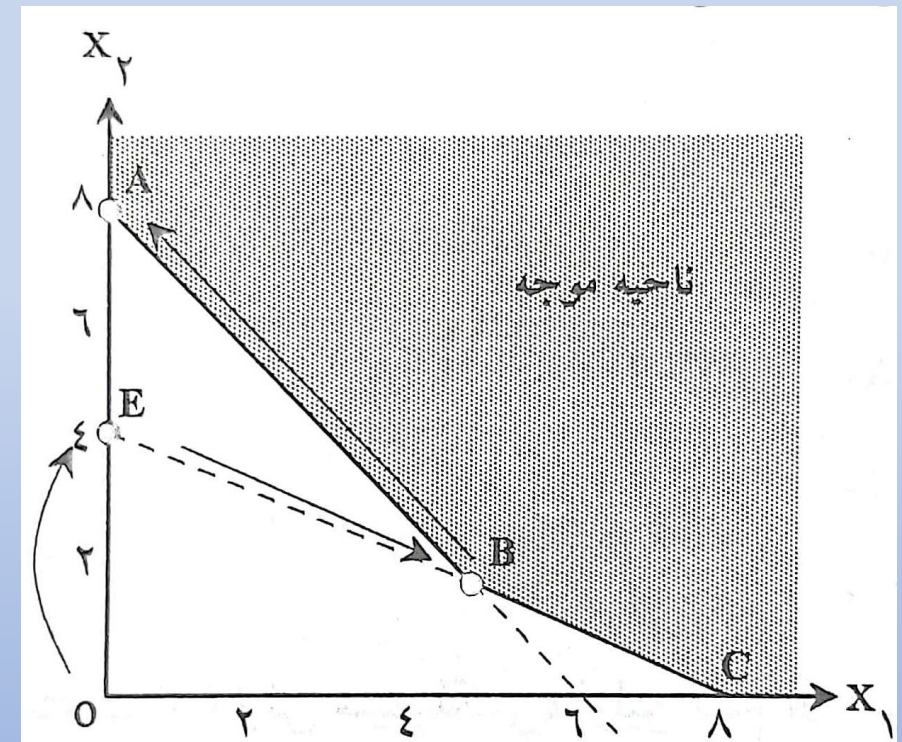
متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست RHS
Z	-1	$6-6M$	$3-7M$	M	M	0	0	$-40M$
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

اکنون با برقراری هر دو ویژگی تابلوی اول و با فرض اینکه M عددی بسیار بزرگ است، می‌توانیم به اجرای الگوریتم سیمپلکس بپردازیم. مثلاً در اولین قدم که انتخاب متغیر ورودی (ستون لولا) می‌باشد، متغیر x_2 را به عنوان ورودی انتخاب می‌کنیم. زیرا $3-7M$ منفی‌ترین ضریب در سطر صفر است. حال با تقسیم 16 بر 4 که مساوی 4 می‌شود و 24 بر 3 که برابر 8 می‌باشد و انتخاب کوچکترین مقدار، متغیر خروجی (سطر لولا) یعنی R_1 نیز مشخص می‌گردد. عدد 4 هم به عنوان عدد لولا که در تقاطع سطر و ستون لولا قرار گرفته است، برای انجام عملیات مراحل بعدی در نظر گرفته می‌شود.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست	
Z_0	1	$6-6M$	$3-7M$	M	M	0	0	$-40M$	تابلوی
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16	اول
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24	
Z_0	-1	$\frac{9}{2}-\frac{5}{2}M$	0	$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}M$	M	$-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}M$	0	$-12-12M$	تابلوی
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	4	دوم
R_2	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	1	12	
Z_0	-1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}+M$	$-\frac{9}{5}+M$	$-\frac{168}{5}$	تابلوی
x_2	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	سوم
x_1	0	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$	
Z_0	-1	2	0	0	1	M	$-1+M$	-24	تابلوی
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	8	چهارم
s_1	0	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	16	





حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$Max Z = 400x_1 + 200x_2$$

Subject to :

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2 \geq 24$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مساله با ترکیبی از محدودیت‌ها:

مثال ۴: مدل مقابل را با استفاده از روش سیمپلکس حل کنید.

ابتدا با اضافه کردن متغیرهای کمکی کمبود و مازاد نامساوی‌ها را به تساوی تبدیل می‌کنیم.

سپس برای محدودیت (های) بزرگتر مساوی متغیر (های) مصنوعی به مدل اضافه می‌کنیم تا

مبدأ مختصات به طور مصنوعی جزء ناحیه موجه گسترش یافته گردد.

$$Max Z = 400x_1 + 200x_2 + 0S_2 + 0S_3 - M R_1 - M R_2$$

همچنین برای محدودیت‌های مساوی که از مبدأ نمی‌گذرند نیز متغیر مصنوعی در نظر می‌گیریم.

$$x_1 + x_2 + R_1 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2 - S_2 + R_2 = 80$$

$$x_1 + S_3 = 20$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

با قرار دادن M بزرگ به عنوان ضریب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف،

مدل آماده قرار گرفتن در جدول سیمپلکس مقدماتی می‌گردد.



حل مسایل برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس

$$\text{Max } Z = 400x_1 + 200x_2 + 0S_2 + 0S_3 - M R_1 - M R_2$$

Subject to :

$$x_1 + x_2 + R_1 = 30$$

$$2x_1 + 8x_2 - S_2 + R_2 = 80$$

$$x_1 + S_3 = 20$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	R_1	S_2	R_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-400	-200	M	0	M	0	0
R_1	0	1	1	1	0	0	0	30
R_2	0	2	8	0	-1	1	0	80
S_3	0	1	0	0	0	0	1	20

حال با استفاده از عملیات سطری ضریب متغیرهای اساسی در سطر صفر را برابر صفر می‌کنیم تا به تابلوی اول سیمپلکس برسیم و پس از آن بتوانیم الگوریتم سیمپلکس را اجرا کنیم.



حل مسایل برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	R_1	S_2	R_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	$-400-3M$	$-200-9M$	0	M	0	0	$-110M$
R_1	0	1	1	1	0	0	0	30
R_2	0	2	8	0	-1	1	0	80
S_3	0	1	0	0	0	0	1	20
Z_0	1	$-350-\frac{3}{4}M$	0	0	$-25-\frac{1}{8}M$	$25+\frac{9}{8}M$	0	$2000-20M$
R_1	0	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	20
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	10
S_3	0	1	0	0	0	0	1	20
Z_0	1	0	0	0	$-25-\frac{1}{8}M$	$25+\frac{9}{8}M$	$250+\frac{3}{4}M$	$9000-5M$
R_1	0	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	5
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	5
x_1	0	1	0	0	0	0	1	20
Z_0	1	0	0	$200+M$	0	M	200	10000
S_2	0	0	0	8	1	-1	-6	40
x_2	0	0	1	0	0	0	-1	10
x_1	0	1	0	0	0	0	1	20

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	R_1	S_2	R_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-400	-200	M	0	M	0	0
R_1	0	1	1	1	0	0	0	30
R_2	0	2	8	0	-1	1	0	80
S_3	0	1	0	0	0	0	1	20

بر اساس تابلوی چهارم جواب بهینه مدل عبارتست از:

$$x_1 = 20, x_2 = 10, S_2 = 40, S_3 = 0, R_1 = 0, R_2 = 0$$

$$Z^* = 10000$$

به دلیل استفاده از مقدار بزرگ برای M در تابع هدف،

این روش را روش M بزرگ نیز می نامند.



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

یکی از معایب روش M بزرگ، به وجود آمدن خطا در مقایسه ضرایب متغیرهای تصمیم در رسیدن به جواب بهینه می‌باشد. به عنوان نمونه در تابع هدف مثال ۴، ضریب x_1 برابر ۴۰۰ و ضریب x_2 برابر ۲۰۰ می‌باشد. ولی با اجرای روش M بزرگ ضرایب آنها به $9M - 200$ و $3M - 400$ تغییر می‌یابد. اگر فرض کنیم $M = 10000$ ضرایب به ترتیب $90200 -$ و $30400 -$ خواهند بود و همانطور که مشاهده می‌شود، نسبت دو برابری ضرایب متغیرهای تصمیم، کاملاً دگرگون شده است.

برای رفع این مشکل روش سیمپلکس دو مرحله‌ای را معرفی می‌کنیم.

در مرحله اول از این الگوریتم، به جای تابع هدف مساله، تابع هدف را $Min R_i = \sum R_i$ در نظر می‌گیریم. در صورتی که کمترین مقدار مجموع متغیرهای مصنوعی که همگی نامنفی هستند، برابر صفر شود، یعنی همه متغیرهای مصنوعی برابر صفر شده‌اند و می‌توان به مرحله دوم رفت.

در مرحله دوم از تابلوی بهینه مرحله اول به عنوان جواب اولیه برای مساله اصلی استفاده می‌کنیم. البته در این مرحله به جای سطر صفر تابلوی بهینه مرحله اول، تابع هدف اصلی مساله را جایگذاری کرده و پس از بررسی شرایط متغیرهای اساسی (ضرایب در سطر صفر، برابر صفر و در سطرهای محدودیت‌ها تشکیل ماتریس واحد دهند)، روش سیمپلکس را اجرا می‌کنیم.



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

Subject to :

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۵: مدل مقابل را با استفاده از روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید.

$$\text{Min } R_1 = R_1 + R_2$$

Subject to :

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

ابتدا فرم گسترده مدل را با تابع هدف حداقل‌سازی مجموع متغیرهای مصنوعی، می‌نویسیم:

باید توجه داشت، صرف نظر از تابع هدف مساله اصلی، تابع هدف مرحله اول همواره از نوع

Min است.

حال برای تشکیل جدول سیمپلکس باید طرفین تابع هدف را در ۱- ضرب کنیم

تا مساله با استاندارد تابع هدف Max حل شود.



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

$$\text{Min } R_1 = R_1 + R_2$$

Subject to :

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$$

$$x_1, x_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	R_1	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	مقادیر سمت راست RHS
R_1	-1	0	0	0	1	1	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

با استفاده از عملیات سطری، ضریب متغیرهای اساسی در سطر صفر را برابر صفر می‌کنیم.

متغیرهای اساسی	R_1	x_1	x_2	S_2	R_1	R_2	S_3	مقادیر سمت راست RHS
R_1	-1	-7	-4	1	0	0	0	-9
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	0	1	2	0	0	0	1	3

در این جدول که تابلوی اول سیمپلکس

مرحله اول می‌باشد، مراحل سیمپلکس را

به اجرا می‌گذاریم.



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

مقادیر سمت راست	S_3	R_2	R_1	S_2	x_2	x_1	R_0	متغیرهای اساسی
-۹	۰	۰	۰	۱	-۴	-۷	-۱	R_0
۳	۰	۰	۱	۰	۱	۳	۰	R_1
۶	۰	۱	۰	-۱	۲	۴	۰	R_2
۳	۱	۰	۰	۰	۲	۱	۰	S_3
-۲	۰	۰	$\frac{۷}{۲}$	۱	$-\frac{۵}{۲}$	۰	-۱	R_0
۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	x_1
۲	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$\frac{۵}{۲}$ *	۰	۰	R_2
۲	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۰	S_3
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	-۱	R_0
$\frac{۲}{۵}$	۰	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	۱	۰	x_1
$\frac{۴}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۱	۰	۰	x_2
۰	۱	-۱	-۱	۱	۰	۰	۰	S_3

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم

* در تابلوی دوم هر دو متغیر R_p و S_3 شرایط خروج از پایه را دارند که به دلخواه R_p را انتخاب کرده‌ایم.

➤ با توجه به اینکه در تابلوی سوم ضرایب متغیرها نامنفی هستند و مقدار تابع هدف صفر است، این تابلو را به عنوان جواب اولیه مرحله دوم در نظر می‌گیریم. البته در سطر صفر تابع هدف اصلی را جایگزین خواهیم کرد.



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

تابلوی مقدماتی:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z_0	-1	4	1	0	0	0
x_1	0	1	0	0/2	0	0/6
x_2	0	0	1	-0/6	0	1/2
S_1	0	0	0	1	1	0

تابلوی اول

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست RHS
Z_0	-1	0	0	-0/2	0	-3/6
x_1	0	1	0	0/2	0	0/6
x_2	0	0	1	-0/6	0	1/2
S_1	0	0	0	1	1	0

تابلوی دوم

جواب بهینه مساله عبارتست از:

$$x_1 = 0/6, \quad x_2 = 1/2, \quad S_1 = S_2 = R_1 = R_2 = 0$$

$$Z^* = 3/6$$



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای

$$\text{Max } Z = 3x_1 - x_2$$

Subject to :

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۶: مدل مقابل را با استفاده از روش سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید.

ابتدا فرم گسترده مدل را با تابع هدف حداقل‌سازی مجموع متغیرهای مصنوعی، می‌نویسیم:

$$\text{Min } R_1 = R_1 \Rightarrow \text{Max } (-R_1) = -R_1$$

Subject to :

$$2x_1 + x_2 - S_1 + R_1 = 2$$

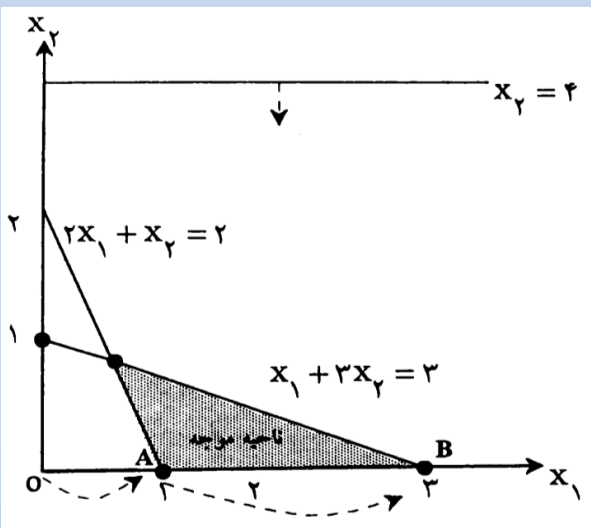
$$x_1 + 3x_2 + S_2 = 3$$

$$x_2 + S_3 = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, R_1 \geq 0$$



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای



متغیرهای اساسی	R_1	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	مقادیر سمت راست RHS
R_1	-1	0	0	0	0	0	1	0
R_2	0	2	1	-1	0	0	1	2
S_2	0	1	3	0	1	0	0	3
S_3	0	0	1	0	0	1	0	4
R_1	-1	-2	-1	1	0	0	0	-2
R_2	0	2	1	-1	0	0	1	2
S_2	0	1	3	0	1	0	0	3
S_3	0	0	1	0	0	1	0	4
R_1	-1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	0	1	0/5	-0/5	0	0	0/5	1
S_2	0	0	2/5	0/5	1	0	-0/5	2
S_3	0	0	1	0	0	1	0	4

تابلوی مقدماتی

تابلوی اول

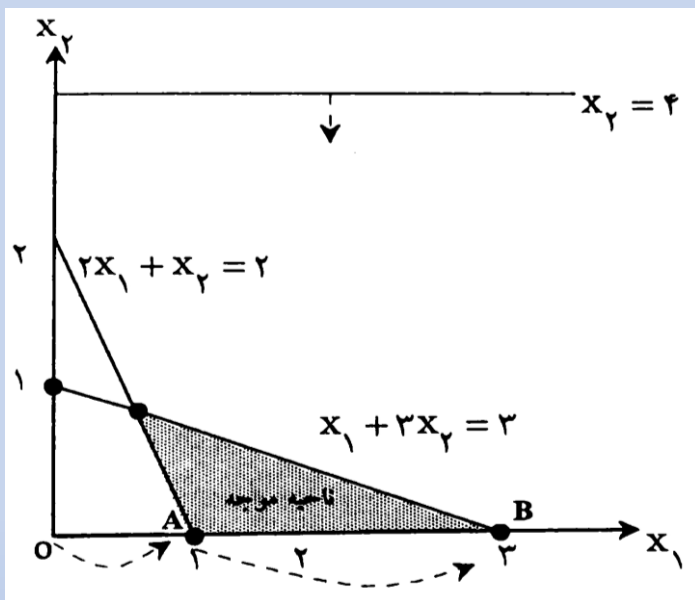
تابلوی دوم

(بهینه)

مرحله اول



روش سیمپلکس دو مرحله‌ای



متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست RHS
Z_0	1	-3	1	0	0	0	0
x_1	0	1	0/5	-0/5	0	0	1
S_2	0	0	2/5	0/5	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	4
Z_0	1	0	2/5	-1/5	0	0	3
x_1	0	1	0/5	-0/5	0	0	1
S_2	0	0	2/5	0/5	1	0	2
S_3	0	0	1	0	0	1	4
Z_0	1	0	10	0	3	0	9
x_1	0	1	3	0	1	0	3
S_1	0	0	5	1	2	0	4
S_3	0	0	2	0	0	1	4

تابلوی مقدماتی

تابلوی اول

تابلوی دوم

(بهینه)

مرحله دوم



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

همانطور که پیشتر در قسمت حل ترسیمی اشاره شد، چهار حالت خاص ممکن است در حل یک مدل برنامه ریزی خطی رخ دهد. حال می‌خواهیم وضعیت جدول سیمپلکس را در هر یک از حالات چهارگانه، مورد بررسی قرار دهیم.

۱- جواب بهینه چندگانه: در حالتی که شیب تابع هدف با یکی از محدودیت‌های فعال مدل برابر باشد، جواب بهینه چندگانه

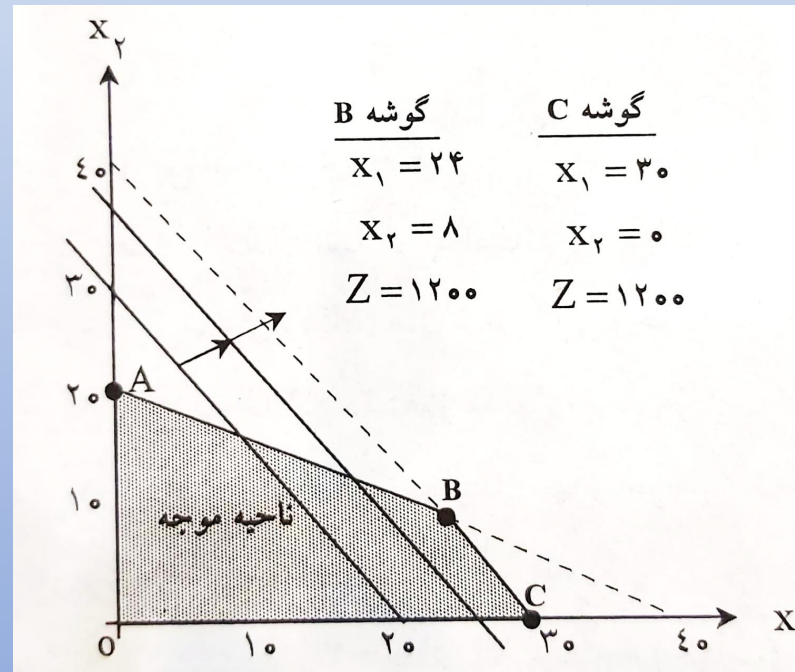
$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

Subject to :

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



خواهیم داشت. به عنوان مثال:

اکنون با نوشتن مدل گسترده استاندارد

به حل مدل با روش سیمپلکس می‌پردازیم.



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست	Z	x_1	x_2	S_1	S_2
Z_0	0	1	-40	-30	0	0
S_1	40	0	1	2	1	0
S_2	120	0	4	3	0	1
Z_0	1200	1	0	0	0	10
S_1	10	0	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$
x_1	30	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

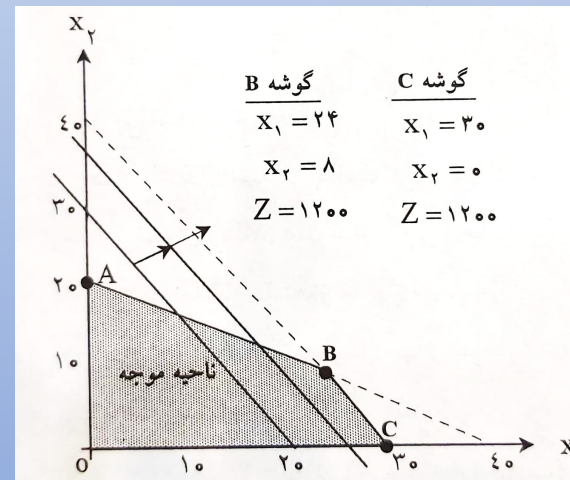
تابلوی سیمپلکس در اولین تکرار به جواب بهینه رسیده است.

اما برخلاف جداول قبلی در سطر صفر علاوه بر متغیرهای اساسی،

متغیر x_2 نیز دارای ضریب صفر است. یعنی اگر x_2 را اساسی کنیم

مقدار تابع هدف تغییری نمی‌کند. (جواب بهینه چندگانه وجود دارد.)

در این تابلو نشان دهنده گوشه C از ناحیه موجه است. در صورتیکه



x_2 را وارد پایه کنیم، به

گوشه B خواهیم رسید.

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست	Z	x_1	x_2	S_1	S_2
Z_0	1200	1	0	0	0	10
x_2	8	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	24	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

۲- فاقد ناحیه موجه (جواب): مدلی که دارای محدودیت‌های ناسازگار باشد، فاقد ناحیه موجه می‌باشد.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

Subject to :

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

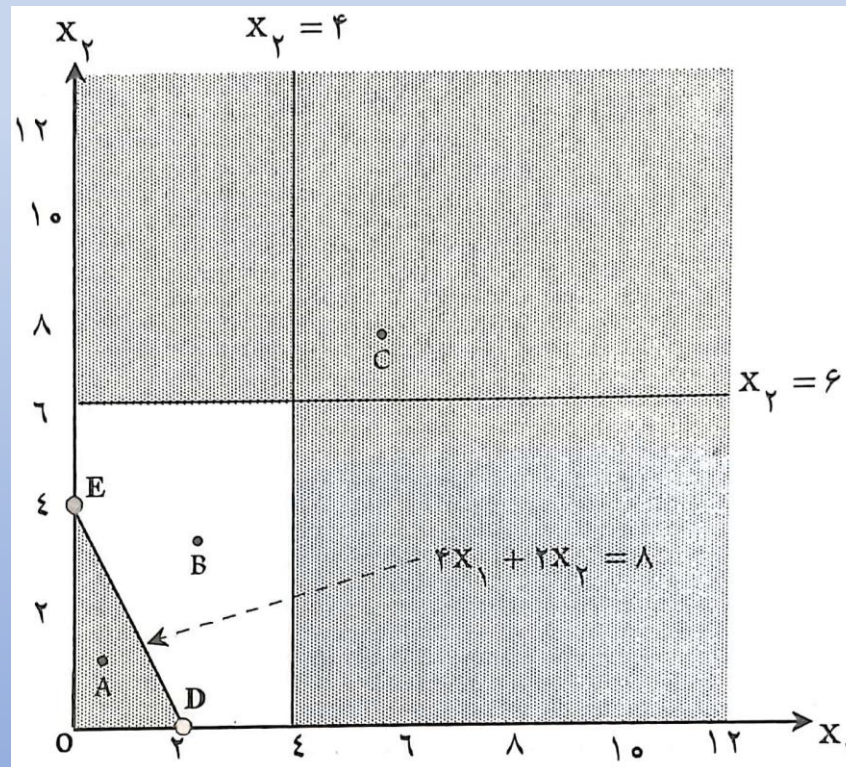
$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال: تشخیص این حالت همانطور که در اسلاید بعدی خواهیم دید، در تابلوی آخر سیمپلکس

امکان‌پذیر است. هرگاه در تابلوی آخر سیمپلکس

حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی مقدار بزرگتر

از صفر داشته باشد، مدل فاقد ناحیه موجه است.





بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_2	s_3	R_3	مقادیر سمت راست	
Z_0	1	-5	-3	0	0	M	0	M	0	تابلوی
s_1	0	4	2	1	0	0	0	0	8	مقدماتی
R_2	0	1	0	0	-1	1	0	0	4	
R_3	0	0	1	0	0	0	-1	1	6	
Z_0	1	-5-M	-3-M	0	M	0	M	0	-10M	تابلوی
s_1	0	4	2	1	0	0	0	0	8	اول
R_2	0	1	0	0	-1	1	0	0	4	
R_3	0	0	1	0	0	0	-1	1	6	
Z_0	1	0	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}M$	$\frac{5}{4}+\frac{1}{4}M$	M	0	M	0	10-8M	تابلوی
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	2	دوم
R_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	1	0	0	2	
R_3	0	0	1	0	0	0	-1	1	6	
Z_0	1	1+M	0	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}M$	M	0	M	0	12-6M	تابلوی
x_2	0	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4	سوم
R_2	0	1	0	0	-1	1	0	0	4	
R_3	0	-2	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	2	

در تابلوی سوم که شرط بهینگی را

دارد، دو تا از متغیرهای مصنوعی

مقدار بزرگتر از صفر دارند. بنابراین

مساله فاقد ناحیه موجه است.

تمرین: این مثال را با استفاده از روش

سیمپلکس دو مرحله‌ای حل کنید.



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

۳- ناحیه جواب بیکران: هرگاه در یک مدل ناحیه موجه توسط محدودیت‌ها بسته نشوند، ناحیه جواب بیکران خواهد داشت. البته با توجه به تابع هدف، ممکن است این مدل‌ها دارای جواب بهینه باشند یا نه!

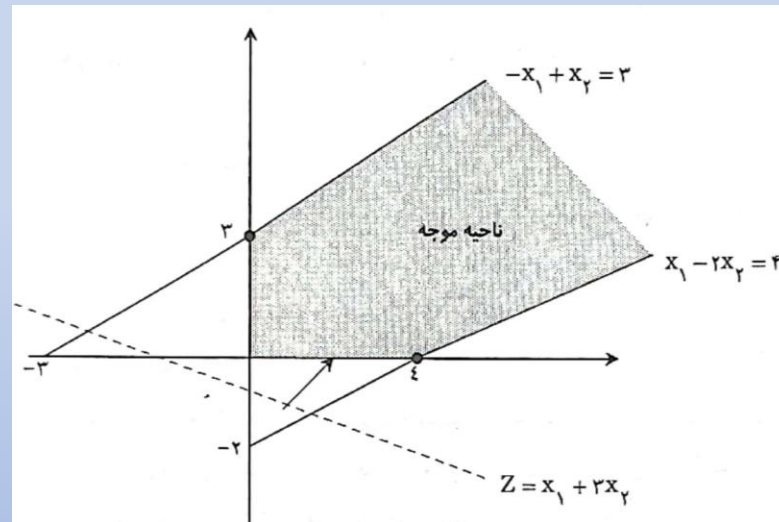
$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

Subject to :

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مثال: همانطور که در شکل مشاهده می‌شود،

ناحیه موجه بیکران است و با توجه به امتداد

تابع هدف، جواب بهینه وجود ندارد.

در تابلوی دوم وجود عدد منفی در سطر صفر نشان می‌دهد که تابلو بهینه

نیست. اما همه اعداد ستون لولا منفی هستند، پس شرایط خروج متغیر

وجود ندارد. بنابراین مدل دارای ناحیه موجه بیکران بدون جواب بهینه است.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-1	-3	0	0	0
S_1	0	1	-2	1	0	4
S_2	0	-1	1	0	1	3
Z_0	1	-4	0	0	3	9
S_1	0	-1	0	1	2	10
x_2	0	-1	1	0	1	3

تابلوی اول

تابلوی دوم



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

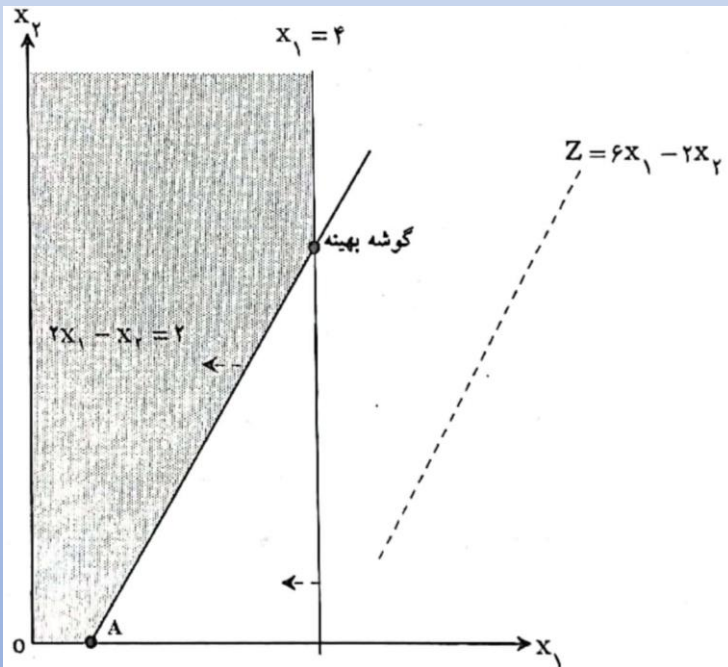
$$\text{Max } Z = 6x_1 - 2x_2$$

Subject to:

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مثال:

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-6	2	0	0	0
S_1	0	2	-1	1	0	2
S_2	0	1	0	0	1	4
Z_0	1	0	-1	3	0	6
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
S_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
Z_0	1	0	0	2	2	12
x_1	0	1	0	0	1	4
x_2	0	0	1	-1	2	6

در این حالت خوشبختانه در تابلوی سیمپلکس به شرایط عدم انتخاب متغیر خروجی
پیش نمی آید و جواب بهینه به دست خواهد آمد.



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی

۴- **جواب تبه‌گن (Degenerate):** جواب تبه‌گن در صورتی به وجود می‌آید که یک گوشه موجه، تقاطع بیش از دو معادله مرزی باشد. در این شرایط در جدول سیمپلکس بیش از یک متغیر شرایط خروج از پایه را پیدا می‌کنند. با انتخاب دلخواه یکی از متغیرها، حداقل یک متغیر اساسی با مقدار صفر در سمت راست جدول سیمپلکس باقی می‌ماند.

جواب تبه‌گن ممکن است از نوع **بهینه** یا از نوع **موقت** باشد. در صورت برخورد به جواب تبه‌گن موقت باید از آن عبور کنیم. معمولاً تکرارهای معمول سیمپلکس، باعث گذر از این وضعیت می‌گردد. البته در شرایطی هم ممکن است تکرارهای سیمپلکس

در یک حلقه تکرار گرفتار شوند که در این شرایط باید **رفع تبه‌گنی*** صورت پذیرد.

$$Max Z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

Subject to :

$$0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

*** تمرین:** با حل مدل مقابل از روش سیمپلکس،

در مورد روش‌های رفع تبه‌گنی تحقیق کنید.



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$

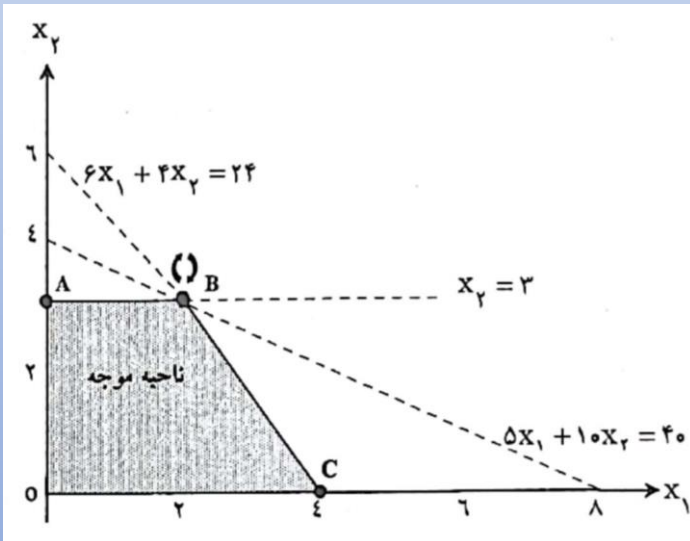
Subject to :

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مثال: تیگن بهینه

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-4	-6	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	24
s_2	0	0	1	0	1	0	3
s_3	0	5	10	0	0	1	40
Z_0	1	-4	0	0	6	0	18
s_1	0	6	0	1	-4	0	12
x_2	0	0	1	0	1	0	3
s_3	0	5	0	0	-10	1	10
Z_0	1	0	0	0	-2	$\frac{4}{5}$	26
s_1	0	0	0	1	8	$-\frac{6}{5}$	0
x_2	0	0	1	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	-2	$\frac{1}{5}$	2
Z_0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	26
s_2	0	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{3}{20}$	0
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{20}$	3
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	2



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

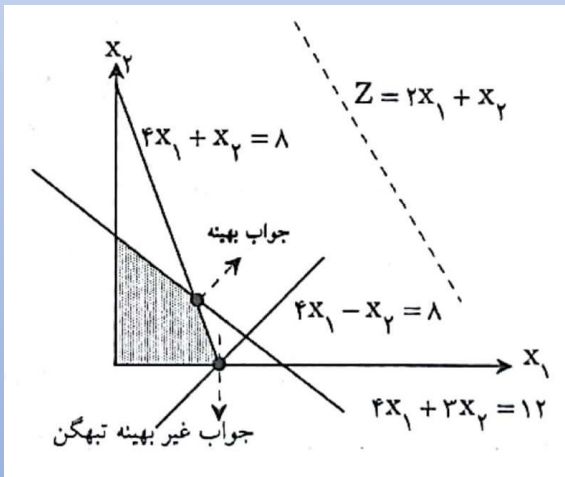
Subject to:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مثال: تبهگن موقت

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	مقادیر سمت راست
Z_0	1	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	4	3	1	0	0	12
S_2	0	4	1	0	1	0	8
S_3	0	4	-1	0	0	1	8
Z_0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
S_1	0	0	2	1	-1	0	4
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2
S_3	0	0	-2	0	-1	1	0
Z_0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	5
x_2	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
S_3	0	0	0	1	-2	1	4

تابلوی

اول

تابلوی

دوم

تابلوی

سوم

(بهینه)



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی

متغیرهای منفی: فرض روش سیمپلکس بر نامنفی بودن همه متغیرها استوار است. اما در عمل گاهی متغیرهای منفی مورد نیاز در فرآیند مدل‌سازی هستند. برای اینکه بتوانیم متغیرهای منفی را وارد الگوریتم سیمپلکس کنیم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

۱- متغیرهای آزاد در علامت: برای متغیر دلخواه x_i که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد، همواره دو عدد نامنفی x_i' و x_i'' وجود دارد به طوری که $x_i = x_i' - x_i''$. به این ترتیب می‌توان متغیرهای آزاد در علامت را می‌توان با تغییر متغیر $x_i = x_i' - x_i''$ وارد مدل کرد. البته هزینه این کار اضافه شدن یک متغیر به مجموعه متغیرهای مدل است.

۲- متغیرهای با حد پایین منفی: برای متغیرهای با حد پایین منفی کفایت به جای x_i'' مقدار ثابت حد پایین را وارد کرد. به عنوان مثال برای $x_i \geq -20$ فقط کفایت بنویسیم: $x_i = x_i' - 20$



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max } Z = 9x_1 + 18x_2$$

Subject to :

$$6x_1 + 3x_2 \geq 18$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ آزاد در علامت}$$

مثال: در مدل مقابل که یکی از متغیرها آزاد در علامت است،

با تغییر متغیر و اضافه کردن یک متغیر به آن، به حل مدل می پردازیم.

در مرحله بعد با اضافه کردن متغیرهای کمکی و مصنوعی، مدل گسترده

را می نویسیم تا به کمک سیمپلکس مساله را حل کنیم.

$$\text{Max } Z = 9(x_1' - x_1'') + 18x_2$$

Subject to :

$$6(x_1' - x_1'') + 3x_2 \geq 18$$

$$2(x_1' - x_1'') + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1', x_1'', x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 9x_1' - 9x_1'' + 18x_2 - M R$$

Subject to :

$$6x_1' - 6x_1'' + 3x_2 - S_1 + R_1 = 18$$

$$2x_1' - 2x_1'' + 2x_2 + S_2 = 16$$

$$x_1', x_1'', x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$



بررسی موارد خاص در حل مسایل برنامه ریزی خطی

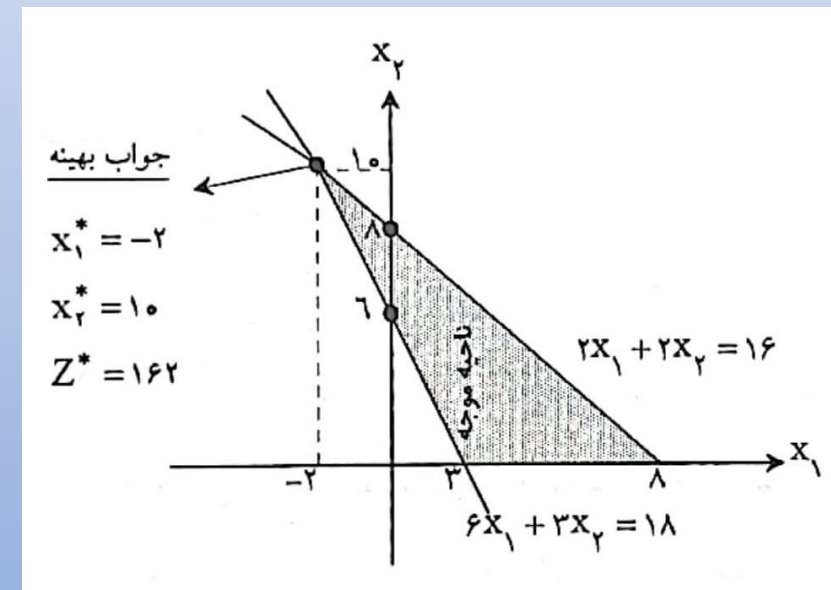
متغیرهای اساسی	Z	x_1'	x_1''	x_2	S_1	R_1	S_2	مقادیر سمت راست	
Z_0	۱	$-9-6M$	$9+6M$	$-18-3M$	M	۰	۰	$-18M$	تابلوی
R_1	۰	۶	-۶	۳	-۱	۱	۰	۱۸	اول
S_2	۰	۲	-۲	۲	۰	۰	۱	۱۶	
Z_0	۱	۰	۰	$-\frac{27}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}+M$	۰	۲۷	تابلوی
x_1'	۰	۱	-۱	$(\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰	۳	دوم
S_2	۰	۰	۰	۱	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۱	۱۰	
Z_0	۱	۲۷	-۲۷	۰	-۶	$6+M$	۰	۱۰۸	تابلوی
x_2	۰	۲	-۲	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰	۶	سوم
S_2	۰	-۲	۲	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	۱	۴	
Z_0	۱	۰	۰	۰	۳	$-3+M$	$\frac{27}{2}$	۱۶۲	تابلوی
x_2	۰	۰	۰	۱	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۱	۱۰	چهارم
x_1''	۰	-۱	۱	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۲	(بهینه)

جواب بهینه عبارتست از:

$$x_1' = 0, x_1'' = 2, x_2 = 10, S_1 = 0, R_1 = 0, S_2 = 0$$

$$Z^* = 162$$

$$x_1' = 0, x_1'' = 2 \Rightarrow x_1 = x_1' - x_1'' = -2$$





تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

و

مساله ثانویه



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

مقدمه:

تابلوی سیمپلکس که در فصل پیش معرفی شد، دارای اطلاعات زیادی است که به بخشی از آن در فصل ۴ اشاره شد. در این فصل ابتدا به بیان اطلاعات تکمیلی در مورد جدول سیمپلکس می‌پردازیم و سپس مفهوم مساله دوگان را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی اولیه، خود یک مساله برنامه‌ریزی خطی است که به آن مساله ثانویه گفته می‌شود. ارتباطات بین مسایل اولیه و ثانویه باعث می‌شود که بتوانیم تفسیر بهتری در مورد منابع مازاد در مساله داشته باشیم. این اطلاعات به مدیران در اتخاذ تصمیم راجع به استفاده از منابع اضافی کمک می‌کند.



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

منابع موجود	محصولات			منابع مورد نیاز
	۳	۲	۱	
۴۳۰	۱	۲	۲	نیروی کار (نفر / ساعت)
۴۶۰	۲	۱	۳	مواد اولیه (Kg)
	۵	۳	۳	سود حاصل از تولید هر واحد

مثال (ترکیب تولید) : $Max Z = ۳x_1 + ۳x_2 + ۵x_3$

Subject to :

$$۲x_1 + ۲x_2 + x_3 \leq ۴۳۰$$

$$۳x_1 + x_2 + ۲x_3 \leq ۴۶۰$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq ۰$$

مدل گسترده:

$$Max Z = ۳x_1 + ۳x_2 + ۵x_3 + ۰S_1 + ۰S_2$$

Subject to :

$$۲x_1 + ۲x_2 + x_3 + S_1 = ۴۳۰$$

$$۳x_1 + x_2 + ۲x_3 + S_2 = ۴۶۰$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq ۰$$

حال به حل مدل با جدول سیمپلکس می‌پردازیم.



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	$\frac{۹}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۱۱۵۰
S_1	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲۰۰
x_3	۰	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲۳۰
Z_0	۱	$\frac{۱۴}{۳}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۲۶۵۰}{۳}$
x_2	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۰۰}{۳}$
x_3	۰	$\frac{۴}{۳}$	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۴۹۰}{۳}$

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم
(بهینه)

✓ ضریب منفی در سطر صفر به معنی افزایش در مقدار تابع هدف است.

✓ مقدار تابع هدف در هر تابلو در قسمت سمت راست سطر صفر مشخص

شده است. (مقدار تابع هدف در هر تکرار بهتر می‌شود.)

✓ مقادیر سمت راست نشان دهنده مقدار متغیرهای اساسی و مقدار

سایر متغیرها برابر صفر می‌باشد.

✓ در تابلوی دوم اعداد $۰/۵$ و $۱/۵$ در ستون x_1 نشان‌دهنده این است که برای تولید یک واحد از محصول ۱ لازم است $۰/۵$ نفر ساعت از

منبع اول کاهش یابد و همچنین $۱/۵$ واحد از تولید محصول ۳ نیز باید کم شود. این موضوع ممکن است با اطلاعات تابلوی اولیه سیمپلکس

متناقض به نظر بیاید. زیرا در تابلوی اول برای تولید محصول ۱ نیازمند ۲ نفر ساعت از نیروی کار بودیم. اما نکته اینجاست که در تابلوی

دوم با تولید یک واحد محصول ۱، $۱/۵$ واحد از منابع محصول ۳ آزاد می‌شود. برای ستون x_2 نیز تعبیر به همین ترتیب است. اما در تکرار

بعدی x_2 را برای ورود به پایه انتخاب می‌کنیم. زیرا باعث افزایش مقدار تابع هدف خواهد شد. (ضریب منفی در سطر صفر دارد.)



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۱۵۰
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۲۰۰
x_3	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۲۳۰
Z_0	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{۳۶۵۰}{۳}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{۲۰۰}{۳}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{۴۹۰}{۳}$

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم
(بهینه)

✓ اعداد ستون S_2 در تابلوی دوم را در نظر بگیرید. اولاً در تولید x_3 تمام

منابع مربوط به S_1 مصرف شده است و عملاً امکان تولید محصولات دیگر

وجود ندارد. مگر اینکه تولید x_3 را کاهش دهیم. همانطور که ملاحظه

می‌شود مصرف هر واحد از S_2 مستلزم کاهش $۵/۰$ واحد تولید x_3 و در

نتیجه افزایش $۵/۰$ واحد منبع S_1 می‌باشد. حال این سوال مطرح است که

اگر ضرایب S_1 و S_2 در تابع هدف صفر است، چرا مصرف یک واحد از منبع S_2 در تابلوی دوم، باعث $۲/۵$ واحد کاهش سود می‌شود؟

در پاسخ باید تاکید کنیم که مصرف یک واحد از منبع S_2 در تابلوی دوم باعث کاهش $۵/۰$ واحد از تولید محصول ۳ خواهد شد. با توجه به

این که هر واحد محصول ۳، به میزان ۵ واحد سود داشت، نتیجه می‌گیریم که $۲/۵$ واحد از سود کل کاسته می‌شود.

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{400}{3}, x_3 = \frac{490}{3}, S_1 = 0, S_2 = 0$$

✓ تابلوی سوم هم به دلیل اینکه عددی منفی در سطر صف ندارد، تابلوی بهینه مدل می‌باشد.

$$Z^* = \frac{۳۶۵۰}{۳}$$



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

قیمت سایه‌ای (Shadow Price): در جدول سیمپلکس علاوه بر اطلاعات ذکر شده تا کنون، اطلاعات مفید دیگری نیز وجود دارد که از آن جمله می‌توان به قیمت سایه‌ای یا ارزش نهایی منابع به کار رفته در تولید اشاره کرد. **آهنگ افزایش Z در اثر افزایش یک واحد به یک منبع را قیمت سایه‌ای آن منبع گویند.** در سطر صفر تابلوی بهینه اعداد مربوط به منابع تولید، نشان‌دهنده ارزش اقتصادی منابع در تولید هستند. قیمت سایه‌ای منبع S_i را با نماد y_i نمایش می‌دهیم.

در این مثال قیمت سایه‌ای منابع عبارتند از: $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{7}{3}$

در برخی تحلیل‌ها برای قیمت سایه‌ای از عبارت فرصت از دست رفته

استفاده می‌کنند. زیرا همانطور که داشتن یک واحد از منبع باعث

افزایش سود به اندازه قیمت سایه‌ای آن منبع خواهد شد، نداشتن

یک واحد از منبع فرصت ایجاد سود را از سازمان می‌گیرد.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۱۵۰
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۲۰۰
x_3	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۲۳۰
Z_0	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2650}{3}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{200}{3}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم
(بهینه)



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

محاسبه مقدار بهینه تابع هدف با استفاده از قیمت سایه‌ای: همانطور که در جدول مشاهده می‌شود ارزش اقتصادی هر واحد از منبع شماره ۱ (نیروی کار) برابر $y_1 = \frac{1}{3}$ و ارزش اقتصادی هر واحد از منبع شماره ۲ (مواد اولیه) برابر $y_2 = \frac{7}{3}$ می‌باشد.

از طرفی در سمت راست تابلوی اول مشاهده می‌کنیم که ۴۳۰ واحد از منبع شماره ۱ و ۴۶۰ واحد از منبع شماره ۲ در اختیار داریم. بنابراین مقدار نهایی سود حاصل از مصرف این منابع برابر است با:

$$Z^* = \sum y_i b_i = y_1 b_1 + y_2 b_2 = \frac{1}{3} \times 430 + \frac{7}{3} \times 460 = \frac{3650}{3}$$

قیمت سایه‌ای برای یک منبع معرف حداکثر قیمتی است که پرداخت

آن برای افزایش یک واحد از این منبع، مقرون به صرفه است.

چنانچه قیمت سایه‌ای یک منبع از قیمت بازار آن بیشتر باشد،

می‌توان میزان مصرف از این منبع را افزایش داد.

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z_0	۱	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۱۱۵۰
S_1	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۲۰۰
x_3	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۲۳۰
Z_0	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3650}{3}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{200}{3}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

تابلوی دوم

تابلوی سوم (بهینه)



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

$$\text{Min } Z = ۱۰x_۱ + ۱۵x_۲$$

Subject to :

$$x_۱ + ۵x_۲ \geq ۸$$

$$x_۱ + x_۲ \geq ۴$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد:

مثال: مدل مقابل را در نظر بگیرید.

ابتدا به کمک متغیرهای کمکی و مصنوعی فرم گسترده و استاندارد آن را می‌نویسیم:

$$\text{Max } (-Z) = -۱۰x_۱ - ۱۵x_۲ - M R_۱ - M R_۲$$

Subject to :

$$x_۱ + ۵x_۲ - S_۱ + R_۱ = ۸$$

$$x_۱ + x_۲ - S_۲ + R_۲ = ۴$$

$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, R_۱, R_۲ \geq ۰$$

سپس اقدام به تشکیل تابلوی مقدماتی می‌کنیم و بعد از آن ضرایب متغیرهای مصنوعی که در تابلوی اول به عنوان متغیرهای اساسی هستند، را در سطر صفر تابلوی سیمپلکس، صفر می‌کنیم تا بتوانیم الگوریتم سیمپلکس را برای یافتن پاسخ بهینه به اجرا بگذاریم.



تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	مقادیر سمت راست
Z_0	-1	10	15	0	0	M	M	0
R_1	0	1	0	-1	0	1	0	8
R_2	0	1	1	0	-1	0	1	4
Z_0	-1	$-10 - 2M$	$15 - 6M$	M	M	0	0	$-12M$
R_1	0	1	(5)	-1	0	1	0	8
R_2	0	1	1	0	-1	0	1	4
Z_0	-1	$7 - \frac{4}{5}M$	0	$2 - \frac{1}{5}M$	M	$-2 + \frac{6}{5}M$	0	$-24 - \frac{12}{5}M$
x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
R_2	0	($\frac{4}{5}$)	0	$\frac{1}{5}$	-1	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{12}{5}$
Z_0	-1	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{4}$	$M - \frac{5}{4}$	$M - \frac{25}{4}$	-45
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	3

تابلوی
مقدمانی

تابلوی
اول

تابلوی
دوم

تابلوی
سوم

$$\text{قیمت سایه منبع اول} = -(M' - \frac{5}{4}) = \frac{5}{4}$$

حذف

$$\text{قیمت سایه ای منبع دوم} = -(M' - \frac{25}{4}) = \frac{25}{4}$$

حذف

قاعده کلی: برای استخراج قیمت سایه ای؛ پنانچه:

۱- محدودیت از نوع کوچکتر مساوی ($\leq$) باشد. ضریب متغیر کمکی در تابلوی بهینه در سطر Z_0 ملاک عمل است.

۲- محدودیت از نوع بزرگتر مساوی ($\geq$) یا مساوی باشد؛ ضریب متغیر مصنوعی در تابلوی بهینه در سطر Z_0 ملاک عمل قرار می گیرد. به طوریکه مقدار M بزرگ حذف شده و ملاک عمل، قدر مطلق مقدار ثابت عددی خواهد بود.



مساله ثانويه

مساله ثانويه، خود يك مساله برنامه‌ريزي خطي است كه به دنبال يافتن ارزش اقتصادي منابع (قيمت سايه‌اي) مساله برنامه‌ريزي خطي اوليه مي‌باشد. تابع هدف در مساله ثانويه حداقل‌سازي مجموع ارزش نسبت داده شده به منابع مورد استفاده يا هزينه توليد مي‌باشد. از مساله ثانويه براي تصميم‌گيري در مورد راه‌حلهای اختصاص منابع در طرح‌های توليدي مختلف، يا فروش منابع استفاده مي‌گردد.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

Subject to :

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

متغيرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	مقادير سمت راست
Z_0	1	$\frac{14}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2650}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{200}{3}$
x_3	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

تابلوی

سوم

(بهينه)

مثال:

قيمت سايه‌اي منابع را y_1 و y_2 در نظر

مي‌گيريم. مدل ثانويه:

$$\text{Min } Y = 430y_1 + 460y_2$$

Subject to :

$$2y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

(مجموع ارزش واقعی منابع به کار رفته در هر واحد از یک محصول باید حداقل به اندازه

سود حاصل از تولید یک واحد از آن محصول باشد.)



مساله ثانويه

مراحل نوشتن مساله ثانويه:

- ۱- مسایل اولیه با تابع هدف ماکزیمم، تبدیل به مسایل ثانویه با تابع هدف مینیمم می‌شوند.
- ۲- به ازای هر محدودیت در مساله اولیه، یک متغیر در مساله ثانویه خواهیم داشت.
- ۳- به ازای هر متغیر در مساله اولیه، یک محدودیت در مساله ثانویه خواهیم داشت.
- ۴- عناصر سمت راست در مساله اولیه، ضرایب تابع هدف در مساله ثانویه خواهند بود.
- ۵- ضرایب تابع هدف در مساله اولیه، عناصر سمت راست در مساله ثانویه خواهند بود.
- ۶- ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌های مساله اولیه، ترانزاده ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌های مساله ثانویه است.
- ۷- اگر همه محدودیت‌های مساله اولیه به شکل کوچکتر مساوی باشند، محدودیت‌های مساله ثانویه به صورت بزرگتر مساوی خواهند بود.
- ۸- همه متغیرها در مسایل اولیه و ثانویه غیر منفی هستند.



مساله ثانويه

مساله اوليه

مساله ثانويه

$$\text{Max } Z = \boxed{3}x_1 + \boxed{3}x_2 + \boxed{5}x_3$$

S.t:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{2}x_1 + \boxed{2}x_2 + \boxed{1}x_3 & \leq & \boxed{430} \\ \boxed{3}x_1 + \boxed{1}x_2 + \boxed{2}x_3 & \leq & \boxed{460} \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\text{Min } Y = \boxed{430}y_1 + \boxed{460}y_2$$

S.t:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{2}y_1 + \boxed{3}y_2 & \geq & \boxed{3} \\ \boxed{2}y_1 + \boxed{1}y_2 & \geq & \boxed{3} \\ \boxed{1}y_1 + \boxed{2}y_2 & \geq & \boxed{5} \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$



مساله ثانويه

مساله اوليه

$$\text{Max } Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

مساله ثانويه

$$\text{Min } Y = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

Subject to :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq C_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq C_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq C_m$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \geq 0$$

$$\text{Max } Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Subject to :

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \leq C_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

فرم خلاصه شده:



مساله ثانويه

موارد خاص در فرم عمومی مساله اوليه و مساله ثانويه:

$$Max Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱- محدودیت‌های مساوی: مدل مقابل که دارای یک محدودیت مساوی است را در نظر بگیرید.

برای نوشتن مساله ثانويه، محدودیت تساوی را به صورت دو نامساوی می‌نویسیم.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1 \end{cases}$$

در بازنویسی مدل، سه محدودیت خواهیم داشت. اگر متناظر با محدودیت‌ها در مساله اوليه y_1' ، y_1'' و y_2 را در نظر بگیریم،

خواهیم داشت: $Min Y = b_1 y_1' - b_1 y_1'' + b_2 y_2$ سپس با تغییر متغیر $y_1 = y_1' - y_1''$ خواهیم داشت: $Min Y = b_1 y_1 + b_2 y_2$

Subject to :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$y_2 \geq 0, \quad y_1 \text{ آزاد در علامت}$$

Subject to :

$$a_{11}y_1' - a_{11}y_1'' + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1' - a_{12}y_1'' + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$y_1', y_1'', y_2 \geq 0$$

به این ترتیب به ازای محدودیت مساوی در مساله اوليه، یک متغیر آزاد در علامت در مساله ثانويه خواهیم داشت.



مساله ثانويه

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 10x_2$$

Subject to :

$$8x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 8x_2 = 24$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال: مدل ثانويه برای مدل مقابل را بنویسید.

متناظر با هر محدودیت در مساله اوليه یک متغیر در مساله ثانويه در نظر می‌گیریم.

متغیر مربوط به محدودیت دوم (مساوی)، آزاد در علامت خواهد بود.

$$\text{Min } Y = 20y_1 + 24y_2 + 10y_3$$

Subject to :

$$8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$4y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 10$$

$$y_1, y_3 \geq 0, \quad y_2 \text{ آزاد در علامت}$$



مساله ثانويه

$$Max Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ آزاد در علامت}$$

۲- متغیر آزاد در علامت: مدل مقابل که دارای متغیر آزاد در علامت است را در نظر بگیرید.

$$Max Z = C_1 x_1 + C_2 x_2' - C_2 x_2''$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}x_2'' \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{22}x_2'' \leq b_2$$

$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

با تغییر متغیر $x_2 = x_2' - x_2''$ خواهیم داشت:

پس از ادغام محدودیت‌های دوم و سوم خواهیم داشت:

$$Min Y = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

Subject to :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = C_2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

و به این ترتیب مساله ثانویه به صورت زیر خواهد بود.

$$Min Y = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

Subject to :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq C_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq C_2$$

$$-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 \geq -C_2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

به این ترتیب به ازای هر متغیر آزاد در علامت در مساله اولیه، یک محدودیت مساوی در مساله ثانویه خواهیم داشت.



مساله ثانويه

$$\text{Max } Z = 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4$$

Subject to :

$$x_1 + 10x_3 + x_4 \leq 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 6$$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3, x_4 آزاد در علامت

مثال: مدل ثانویه برای مدل مقابل را بنویسید.

$$\text{Min } Y = 4y_1 + 10y_2 + 6y_3$$

Subject to :

$$y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 40$$

$$2y_2 + y_3 \geq 20$$

$$10y_1 + 6y_2 + 20y_3 = 100$$

$$y_1 + 2y_2 = 60$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



مساله ثانويه

۳- تابع هدف Min: در مسایل برنامه ریزی خطی با تابع هدف Min ابتدا همه محدودیت‌ها را به بزرگتر مساوی تبدیل می‌کنیم و سپس مراحل گفته شده در نوشتن مدل ثانویه را پیش می‌گیریم. تنها تفاوت در قیدهای مساله ثانویه است که همگی به صورت کوچکتر مساوی خواهند بود.

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

Subject to :

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

محدودیت اول را در
منفی ضرب می‌کنیم

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

Subject to :

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مدل ثانویه

$$\text{Max } Y = -6y_1 + y_2$$

Subject to :

$$-2y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$3y_1 + 3y_2 \leq 2$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



مساله ثانويه

مثال: مدل ثانويه برای مدل مقابل را بنویسید.

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

Subject to :

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$

$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 آزاد در علامت

$$\text{Max } Y = 6y_1 + y_2$$

Subject to :

$$2y_1 + 2y_2 \leq 1$$

$$-3y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$y_1 - y_2 = 1$$

$y_2 \geq 0$, y_1 آزاد در علامت



مساله ثانويه

جمع‌بندی مسائل متناظر اوليه و ثانويه و روابط بين آنها:

مساله از نوع Max	مساله از نوع Min
تعداد محدوديتها	تعداد متغيرها
محدوديت كوچكتر مساوي	متغير غيرمنفي
محدوديت مساوي (=)	متغير آزاد در علامت
متغير غيرمنفي	محدوديت بزرگتر مساوي
متغير آزاد در علامت	محدوديت مساوي (=)
تعداد متغيرها	تعداد محدوديتها
ضريب تابع هدف براي متغير z ام	حد سمت راست براي محدوديت z ام
حد سمت راست براي محدوديت i ام	ضريب تابع هدف متغير i ام
ضريب‌فني در محدوديت i ام براي متغير z ام (a_{ij})	ضريب‌فني در محدوديت z ام براي متغير i ام (a_{ji})



مساله ثانويه

قضایای ثانویه:

قضیه ۱: ثانویه مساله ثانویه، مساله اولیه است.

قضیه ۲: چنانچه $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک جواب موجه مساله اولیه و $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ جواب موجه

مساله ثانویه باشد، در این صورت رابطه $\sum_{j=1}^n C_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$ یعنی $Z \leq Y$ برقرار است.

قضیه ۳: چنانچه $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ و $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ به ترتیب جوابهای بهینه مساله اولیه

و ثانویه باشند، در این صورت داریم:

$$\sum_{j=1}^n C_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \Rightarrow Z^* = Y^*$$

قضیه ۴: هر جواب اساسی در مساله اولیه دارای یک «جواب اساسی مکمل» در مساله ثانویه

است که بین متغیرهای آنها «رابطه لنگی مکمل» وجود دارد.

متغیر اولیه	متغیر متناظر ثانویه
اساسی (m)	غیراساسی (m)
غیراساسی (n)	اساسی (n)



مساله ثانويه

مثال: جواب‌های گوشه‌ای مربوط به مساله اوليه و ثانويه مدل مقابل را مقايسه كنيد.

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

Subject to:

$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$

$$5x_1 + x_2 + S_2 = 15$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Y = 10y_1 + 15y_2$$

Subject to:

$$y_1 + 5y_2 - t_1 = 8$$

$$y_1 + y_2 - t_2 = 4$$

$$y_1, y_2, t_1, t_2 \geq 0$$

نام گوشه	مساله اوليه		مساله ثانويه			
	جواب اساسي (x_1, x_2, S_1, S_2)	موجه؟	Z (Y_0)	موجه؟	جواب اساسي مڪمل	
					(y_1, y_2, t_1, t_2)	
O	$(0, 0, 10, 15)$	بله	0	خير	$(0, 0, -8, -4)$	
A	$(3, 0, 7, 0)$	بله	24	خير	$(0, \frac{8}{5}, 0, -\frac{12}{5})$	
B	$(\frac{5}{4}, \frac{25}{4}, 0, 0)$	بله	45*	بله	$(3, 1, 0, 0)$	
C	$(0, 10, 0, 0)$	بله	40	خير	$(4, 0, -4, 0)$	
D	$(0, 15, -5, 0)$	خير	60	بله	$(0, 4, 12, 0)$	
E	$(10, 0, 0, -35)$	خير	80	بله	$(8, 0, 0, 4)$	

همانطور كه ملاحظه كى شود در تمام جوابهاى مكمل روابط زير برقرار هستند.

$$S_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j t_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$