

نمونه مسائل مدل سازی درس تحقیق در عملیات

برنامه ریزی خطی

استاد: سید احمد یزدیان

۱- یک کارخانه تولیدکننده لوازم خانگی یخچال های تولیدی خود را ماهانه از سه انبار ۱، ۲ و ۳ به سه فروشگاه A، B و C برای عرضه به بازار حمل می کند. هزینه حمل هر یخچال از هر انبار به هر فروشگاه، میزان موجودی ماهانه انبارها و مقدار تقاضای ماهانه فروشگاه ها به شرح جدول زیر است:

انبار	هزینه حمل هر یخچال از هر انبار به هر فروشگاه			موجودی انبار
	A	B	C	
۱	۱۰	۵	۱۲	۲۰۰
۲	۴	۹	۱۵	۱۵۰
۳	۱۵	۸	۶	۳۰۰
تقاضای فروشگاه	۱۰۰	۳۰۰	۲۵۰	

این کارخانه باید از کدام انبار به کدام فروشگاه و به چه میزان یخچال ارسال نماید تا ضمن تامین تقاضای هر فروشگاه هزینه حمل و نقل وی حداقل گردد. مدل برنامه ریزی خطی (LP) مربوطه را بسازید.

۲- شرکت رنگ پارس دو نوع رنگ روغنی و پلاستیک با استفاده از دو ماده خام ۱ و ۲ تولید می کند. اطلاعات اولیه مساله در جدول زیر ارائه شده است:

	مقدار ماده خام لازم (تن) برای تولید هر تن از		حداکثر مقدار در دسترس روزانه (تن)
	رنگ روغنی	رنگ پلاستیک	
ماده خام ۱	۶	۴	۲۴
ماده خام ۲	۱	۲	۶
سود هر تن (هزار دلار)	۵	۴	

بر مبنای نتایج مطالعه بازار مدیریت تصمیم گرفته است که: (۱) حداکثر تولید روزانه رنگ پلاستیک برابر ۵ تن باشد، (۲) مقدار تولید روزانه رنگ پلاستیک نباید کمتر از رنگ روغنی باشد، (۳) مجموع تولید دو رنگ باید حداقل برابر ۳ تن باشد و (۴) نسبت رنگ پلاستیک تولیدی به مجموع رنگ های پلاستیک و روغنی تولید شده نباید بیش از ۰٫۵ باشد. یک مدل برنامه ریزی خطی (LP) بسازید تا مقدار بهینه رنگ های پلاستیک و روغنی که باید تولید شوند تا سود روزانه شرکت بیشینه شود را تعیین کند.

۳- کارخانه‌ای ۳ محصول I، II و III را با استفاده از مواد خام A و B تولید می‌کند. جدول زیر اطلاعات مساله را نشان می‌دهد:

مقدار ماده خام لازم برای هر واحد از محصول (کیلوگرم)	مقدار در دست (کیلوگرم)			ماده خام
	III	II	I	
۴۰۰۰	۵	۳	۲	A
۶۰۰۰	۷	۲	۴	B
حداقل تقاضا	۱۵۰	۲۰۰	۲۰۰	
سود هر واحد	۵۰	۲۰	۳۰	

سهم محصولات I و II به ترتیب حداکثر ۳۰٪ و حداکثر ۲۰٪، و سهم محصول III حداقل ۵۰٪ کل میزان تولید سه محصول باید باشد. یک مدل LP بسازید تا تعیین کند این کارخانه از هر محصول چه میزان تولید نماید تا حداکثر سود را بدست آورد.

۴- یک مرکز بازیافت فلز از دو نوع فلز قراضه، الف و ب، برای تولید یک آلیاژ ویژه استفاده می‌کند. فلز قراضه الف شامل ۶٪ آلومینیم، ۳٪ سیلیکون و ۴٪ کربن می‌باشد. فلز قراضه ب شامل ۳٪ آلومینیم، ۶٪ سیلیکون و ۳٪ کربن می‌باشد. هزینه هر تن از فلزهای الف و ب به ترتیب برابر ۱۰۰ و ۸۰ واحد پول است. آلیاژ ویژه باید دارای مشخصات زیر باشد:

(۱) شامل حداقل ۳٪ و حداکثر ۶٪ آلومینیم باشد،

(۲) شامل حداقل ۳٪ و حداکثر ۵٪ سیلیکون باشد، و

(۳) میزان کربن آن بین ۳٪ تا ۷٪ باشد.

یک مدل برنامه ریزی خطی بسازید تا ترکیب بهینه فلزات قراضه را برای تولید ۱۰۰۰ تن آلیاژ ویژه تعیین نماید.

۵- وعده صبحانه فردی باید شامل میزان معینی از ویتامین‌های A و B باشد. مواد اصلی مورد استفاده در صبحانه به منظور تامین ویتامین‌های A و B، تخم مرغ، گوشت و نان می‌باشند. جدول زیر میزان ویتامین‌های موجود در هر کدام از این مواد غذایی را نشان می‌دهد:

میزان ویتامین موجود در مواد اصلی (بر حسب میلی گرم)		نیاز روزانه فرد (بر حسب میلی گرم)	
ویتامین	هر عدد تخم مرغ	هر ۵۰ گرم گوشت	هر عدد نان
A	۲	۴	۱
B	۳	۲	۱
	حداقل	حداکثر	
	۱۶	۲۵	
	۱۲	۳۰	

قیمت هر تخم مرغ ۳۰۰، هر ۵۰ گرم گوشت ۱۰۰۰ و هر عدد نان ۲۰۰ تومان می‌باشد. یک مدل برنامه ریزی خطی بسازید تا با حداقل هزینه ممکن، میزان هر کدام از این مواد غذایی را در صبحانه تعیین کند بطوریکه ویتامین‌های مورد نیاز فرد تامین شوند.

۶- یک شرکت تولیدکننده آبمیوه از عصاره‌های سیب و انگور برای تولید یک آبمیوه مخلوط استفاده می‌کند. هر کیلوگرم عصاره سیب حاوی ۱۰۴ گرم قند، ۱۷ گرم چربی و ۲۶ گرم پروتئین می‌باشد. هر کیلوگرم عصاره انگور نیز حاوی ۲۰۰ گرم قند، صفر گرم چربی و ۱۳ گرم پروتئین می‌باشد. قیمت هر کیلوگرم عصاره سیب و انگور به ترتیب برابر ۳۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومان است.

هر کیلوگرم آبمیوه مخلوط باید دارای مشخصات زیر باشد: ۱) حاوی حداقل ۷۰ و حداکثر ۱۰۰ گرم قند باشد، ۲) حاوی حداکثر ۰,۵ گرم چربی باشد و ۳) میزان پروتئین آن بین ۳ تا ۵ گرم باشد. همچنین، هر کیلوگرم آبمیوه باید دقیقاً شامل ۰,۵ کیلوگرم مجموع عصاره‌های سیب و انگور باشد (مابقی آن را آب تشکیل می‌دهد). یک مدل برنامه ریزی خطی بسازید تا میزان بهینه عصاره هر یک از میوه‌ها را در هر کیلوگرم آبمیوه مخلوط تعیین نماید.

۷- هر واحد از محصولی از ۴ واحد قطعه A و ۳ واحد قطعه B تشکیل می‌شود. دو قطعه A و B از دو ماده خام مختلف که از آن‌ها به ترتیب ۱۰۰ و ۲۰۰ واحد موجود است ساخته می‌شوند. قطعات A و B در سه بخش کارخانه تولید می‌شوند و هر بخش از روش خاص خود برای تولید قطعات استفاده می‌کند (هر بخش می‌تواند قطعات را تولید کند ولی با سرعت و میزان استفاده متفاوت از مواد). میزان مواد خام مورد نیاز و تعداد قطعات ساخته شده از هر نوع در هر بخش کارخانه در هر شیفت در جدول زیر داده شده است. هدف تعیین تعداد شیفت‌های کاری برای هر بخش است بطوریکه تعداد کل محصول نهایی تولید شده حداکثر شود.

بخش	میزان ماده خام مصرف شده در هر شیفت		تعداد قطعه تولید شده در هر شیفت	
	ماده خام ۱	ماده خام ۲	A	B
۱	۸	۶	۷	۵
۲	۵	۹	۶	۹
۳	۳	۸	۸	۴

۸- محصولی از ۱ واحد قطعه A، ۲ واحد قطعه B و ۳ واحد قطعه C تشکیل می‌شود. هر قطعه می‌تواند در ۳ کارگاه مختلف تولید شود. جدول زیر میزان تولید ۳ قطعه را در هر یک از کارگاه‌ها و حداکثر ظرفیت تولید کارگاه‌ها را نشان می‌دهد. هدف عبارتست از تعیین تعداد ساعاتی که هر کارگاه باید به ساختن هر قطعه اختصاص دهد تا تعداد محصولات نهایی تولیدی حداکثر شود. مساله را بصورت یک مدل LP فرموله نمایید.

کارگاه	حداکثر ظرفیت تولید (بر حسب ساعت)	میزان تولید (تعداد در ساعت)		
		قطعه A	قطعه B	قطعه C
۱	۱۰۰	۱۰	۱۵	۵
۲	۱۵۰	۱۵	۱۰	۵
۳	۸۰	۲۰	۵	۱۰

۹- شرکتی محصولی را از مونتاژ یک عدد قاب، ۲ عدد میله فلزی و ۲ عدد بلبرینگ تولید می‌کند. میله فلزی و قاب در داخل شرکت تولید می‌شوند و بلبرینگ از خارج کارخانه تهیه می‌شود. هر میله فلزی از مراحل ماشین سندان، ماشین تراش و ماشین تیزکن می‌گذرد. زمان‌های این مراحل برای هر میله فلزی به ترتیب عبارتند از: ۰,۵ ساعت، ۰,۲ ساعت و ۰,۳ ساعت. هر قاب نیز ۰,۸ ساعت در ماشین سندان، ۰,۱ ساعت در ماشین مته، ۰,۳ ساعت در آسیاب و ۰,۵ ساعت در ماشین تیزکن وقت می‌گیرد. چنانچه شرکت از هر ماشین ۱ عدد داشته باشد و اگر هر ماشین حداکثر ۲۴۰۰ ساعت در سال در دسترس باشد، تعداد اجزای محصول (از هر نوع) که برای رسیدن به حداکثر تعداد محصول مونتاژ شده نهایی باید در سال تولید شوند را تعیین کنید.

۱۰- تقاضای محصولی در یک فروشگاه در ۴ ماه آینده به ترتیب برابر ۳۰۰، ۴۰۰، ۴۵۰ و ۲۵۰ واحد می‌باشد. قیمت خرید این فروشگاه از تولیدکننده در این ۴ ماه به ترتیب برابر ۲۰، ۲۲، ۲۴ و ۲۶ واحد پول است. تولیدکننده در هر ماه می‌تواند بیش از ۴۰۰ واحد محصول به فروشگاه ارسال نماید. هزینه انبارداری هر واحد محصول در هر ماه ۳٫۵ واحد پول می‌باشد. بعلاوه، حداکثر ظرفیت انبار فروشگاه در هر ماه برابر ۱۰۰ واحد محصول است. یک مدل LP بسازید تا به این فروشگاه کمک کند با حداقل هزینه ممکن تقاضای این ۴ ماه را تامین نماید.

۱۱- پالایشگاهی می‌تواند دو نوع نفت خام سبک و سنگین خریداری کند. هزینه هر بشکه از نفت خام‌های فوق به ترتیب ۱۱ و ۹ دلار است. از هر نوع نفت خام می‌توان محصولات گازوئیل، نفت سفید و سوخت هواپیما به شرح جدول زیر تولید کرد:

تعداد بشکه محصول به دست آمده از هر بشکه نفت خام اولیه			
گازوئیل	نفت سفید	سوخت هواپیما	
۰٫۴	۰٫۲	۰٫۳۵	نفت خام سبک
۰٫۳۲	۰٫۴	۰٫۲	نفت خام سنگین

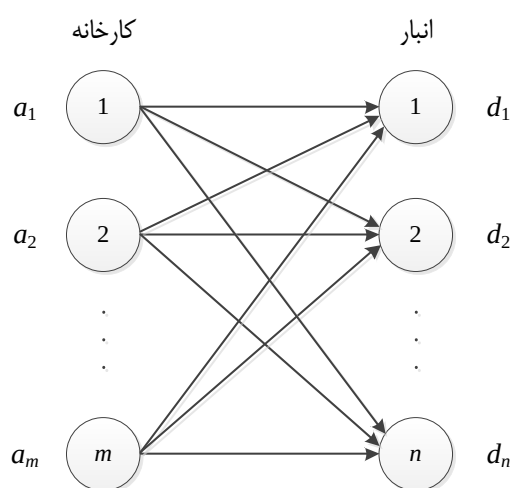
هنگام فرآیند پالایش به ترتیب ۵٪ و ۸٪ نفت خام‌های فوق هدر می‌روند. پالایشگاه باید ۱ میلیون بشکه گازوئیل، ۴۰۰ هزار بشکه نفت سفید و ۲۵۰ هزار بشکه سوخت هواپیما تحویل دهد. تعداد بشکه‌های لازم از دو نوع نفت خام را برای برآوردن تقاضا و حداقل کردن هزینه کل بصورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

۱۲- یک کارخانه کاغذسازی رول‌های بزرگ کاغذی با طول استاندارد L و عرض ۲۰ فوت تولید می‌کند. فرض کنید یک مشتری نیاز به رول‌های با طول L و عرض‌های ۵، ۷ و ۹ فوت داشته و سفارشی بصورت زیر به این کارخانه داده است: ۱۵۰ عدد رول ۵ فوتی، ۲۰۰ عدد رول ۷ فوتی و ۳۰۰ عدد رول ۹ فوتی. می‌خواهیم در حالیکه نیاز مشتری برآورده می‌شود، تعداد کل رول‌های مصرفی استاندارد حداقل شود. مدل ریاضی مساله را بنویسید.

مساله حمل و نقل:

شرکتی دارای m کارخانه در شهرهای مختلف می‌باشد. شرکت باید هر هفته محصولات خود را از این m کارخانه به n انبار در شهرهای بزرگ برای عرضه در خرده فروشی‌ها حمل نماید. فرض کنید ظرفیت تولید کارخانه i ام a_i ($i=1,2,\dots,m$) برابر تقاضای انبار j ام ($j=1,2,\dots,n$) برابر d_j و هزینه حمل و نقل هر یک واحد کالا از کارخانه i به انبار j برابر c_{ij} باشد.

می‌خواهیم با حداقل هزینه حمل و نقل، تقاضای تمامی انبارها را برآورده سازیم بدون اینکه از ظرفیت تولید کارخانه‌ها تجاوز شود. به عبارت دیگر، در مساله حمل و نقل هدف تعیین تعداد محصول حمل شده از هر کارخانه به هر انبار است بطوریکه کل هزینه های حمل و نقل حداقل گردد.



مجهول مساله: میزان کالای در جریان روی هر کمان.

توجه: در مساله حمل و نقل ارسال بهینه (یعنی با حداقل هزینه) محصولات از تعدادی مبدأ به تعدادی مقصد مورد توجه است. زوج‌های مبدأ-مقصد می‌توانند به عنوان مثال موارد زیر باشند: کارخانه-انبار، کارخانه-فروشگاه، انبار-فروشگاه، معدن-کارخانه ذوب آهن و ...

مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) مساله حمل و نقل (در حالت کلی) برای تعیین میزان کالای ارسالی از هر کارخانه به هر انبار بصورت زیر ساخته می‌شود.

ابتدا باید متغیرهای تصمیم را تعریف کنیم.

x_{ij} : تعداد محصول حمل شده از کارخانه i به انبار j ($i=1,2,\dots,m$)، ($j=1,2,\dots,n$).

حال می‌توان مدل را بصورت زیر فرموله کرد:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

- تابع هدف سعی در حداقل کردن کل هزینه های حمل و نقل دارد.
- مجموعه محدودیت های اول (به تعداد m محدودیت) عنوان می کنند که به ازای هر کارخانه i، مجموع کالاهای ارسال شده از این کارخانه به تمامی انبارها نمی تواند بیش از ظرفیت تولید کارخانه باشد.
- مجموعه محدودیت های دوم (به تعداد n محدودیت) عنوان می کنند که به ازای هر انبار j، مجموع کالاهای دریافت شده از تمامی کارخانه ها باید حداقل برابر با تقاضای این انبار باشد.
- سطر آخر مدل نیز بیان می کند که تعداد کالای حمل شده روی هر کمان نمی تواند عددی منفی باشد.

مثال (مساله حمل و نقل):

برای تولید فولاد، سنگ آهن باید از دو معدن استخراج شده و به سه کارخانه ذوب آهن حمل شود. اطلاعات مساله بصورت جدول زیر است:

معدن	هزینه حمل و نقل هر تن سنگ آهن			حداکثر سنگ آهن قابل استخراج
	کارخانه ۱	کارخانه ۲	کارخانه ۳	
۱	۹	۱۶	۲۸	۱۰۳
۲	۱۴	۲۹	۱۹	۱۹۷
حداقل تقاضا	۷۱	۱۳۳	۹۶	

مدل برنامه ریزی خطی مساله را بسازید.

حل:

ابتدا متغیرهای تصمیم را بصورت زیر تعریف می کنیم:

x_{ij} : مقدار سنگ آهن حمل شده از معدن i به کارخانه j (برحسب تن) $(i=1,2), (j=1,2,3)$.

حال می توان مدل را بصورت زیر فرموله کرد:

$$\text{Min } z = 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23}$$

s.t.:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 103,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 197,$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 71,$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 133,$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 96,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,3.$$

در مدل فوق دو محدودیت اول نشان دهنده حداکثر ظرفیت معادن و سه محدودیت بعدی نشان دهنده برآورده نمودن تقاضای کارخانه ها می باشند.

مثال:

شهرداری یک شهر می خواهد بافت فرسوده مرکز شهر را بازسازی نماید، تا از این طریق در بلندمدت بتواند درآمدهای مالیاتی بیشتری بدست آورد. پروژه شامل دو فاز عمده می باشد: (۱) تخریب خانه های فرسوده و (۲) ساخت بناهای جدید. اطلاعات زیر در دست می باشند:

الف) حداکثر ۳۰۰ خانه قدیمی می تواند تخریب شود. هر خانه ۲۵۰ مترمربع مساحت داشته و هزینه تخریب هر یک برابر ۲۰۰۰ دلار می باشد.

ب) چهار نوع خانه کوچک، متوسط، لوکس و اعیانی قرار است احداث شود که مساحت هر واحد آنها به ترتیب عبارتند از: ۱۸۰، ۲۸۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ مترمربع. همچنین، ۱۵٪ از مساحت در دسترس به خیابان ها، پارک، فضاهای باز و ... اختصاص پیدا می کند.

ج) خانه های لوکس و اعیانی باید حداقل ۲۵٪، خانه های کوچک باید حداقل ۲۰٪ و خانه های متوسط باید حداقل ۱۰٪ تعداد کل خانه های احداث شده را تشکیل دهند.

د) هزینه ساخت هر واحد از خانه های کوچک، متوسط، لوکس و اعیانی به ترتیب برابر ۵۰۰۰۰، ۷۰۰۰۰، ۱۳۰۰۰۰ و ۱۶۰۰۰۰ دلار می باشد. همچنین، حداکثر ۱۵ میلیون دلار بودجه می توان تهیه نمود.

ه) مالیات هر واحد از خانه های کوچک، متوسط، لوکس و اعیانی به ترتیب برابر ۱۰۰۰، ۱۹۰۰، ۲۷۰۰ و ۳۴۰۰ دلار است.

از هر نوع خانه چه تعداد باید ساخته شود تا مجموع کل مالیات جمع آوری شده حداکثر گردد؟

حل:

تعریف متغیرهای تصمیم:

x_1 : تعداد خانه های کوچک احداث شده،

x_2 : تعداد خانه های متوسط احداث شده،

x_3 : تعداد خانه های لوکس احداث شده،

x_4 : تعداد خانه های اعیانی احداث شده،

x_5 : تعداد خانه های قدیمی که باید تخریب شوند.

مدل مساله بصورت زیر است:

$$\text{Max } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

s.t.:

$$x_5 \leq 300 \quad \text{(الف)}$$

$$180x_1 + 280x_2 + 400x_3 + 500x_4 \leq 0.85 \times 250x_5 \quad \text{(ب)}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\geq 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 &\geq 0.1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 &\geq 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned} \right\} \quad \text{(ج)}$$

$$50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 \leq 1500 \quad \text{(د) بر حسب هزار دلار}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$