

# تحقیق در عملیات ۳

برنامه‌ریزی عدد صحیح

## انواع مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی

- 
- ۱) Linear programming (LP)
  - ۲) Non-linear programming (NLP)
  - ۳) Integer programming (IP)
  - ۴) Mixed Integer programming (MIP)
  - ۵) Mixed integer non-linear programming (MINLP)
  - ۶) ...

## انواع مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی

$$\min/ \max f(X)$$

$$g_i(X) \leq b_i \quad \forall i$$

$$X \geq 0$$



| مدل   | $f(X)$  | $g_i(X)$ | $X$               |
|-------|---------|----------|-------------------|
| LP    | خطی     | خطی      | پیوسته            |
| NLP   | غیرخطی* | غیرخطی*  | پیوسته            |
| IP    | خطی     | خطی      | عدد صحیح          |
| MIP   | خطی     | خطی      | عدد صحیح و پیوسته |
| MINLP | غیرخطی* | غیرخطی*  | عدد صحیح و پیوسته |

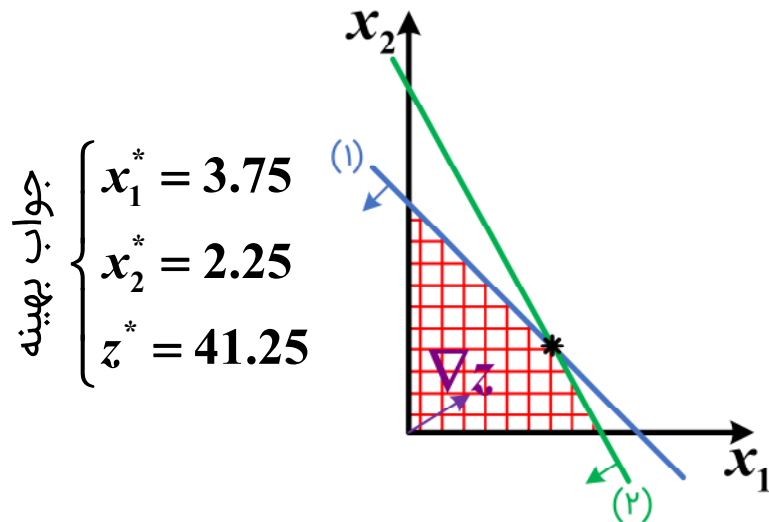
\* در مدل‌های غیرخطی حداقل یکی از دو توابع (نه لزوماً هر دو) باید غیرخطی باشد.

## انواع مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح

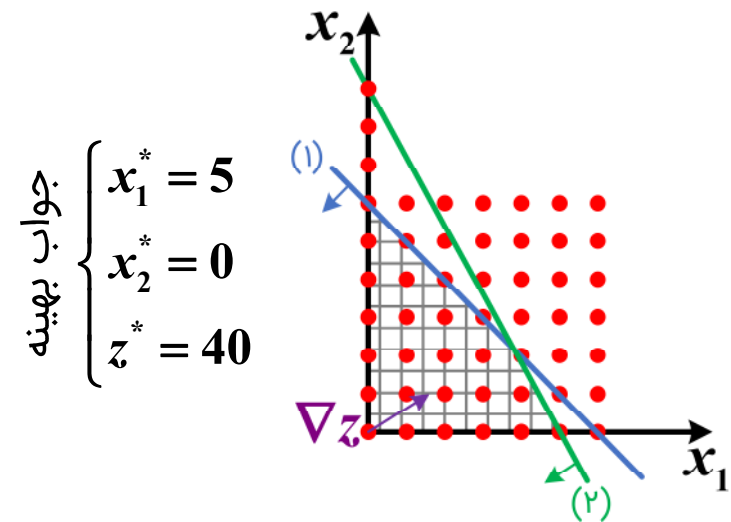
- 
۱. Binary integer programming (BIP)
  ۲. Pure integer programming (PIP)
  ۳. Mixed Integer programming (MIP)

## مفهوم برنامه‌ریزی عدد صحیح

$$\begin{aligned}
 LP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 IP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\
 x_1, x_2 &\geq 0, \text{int}
 \end{aligned}$$



## مقایسه مدل LP و IP

| ویژگی            | مدل IP                       | مدل LP         |
|------------------|------------------------------|----------------|
| فضای جواب        | محدودتر*                     | -              |
| محل جواب بهینه   | گوشه یا نقاط داخلی فضای جواب | گوشه فضای جواب |
| حساسیت روش حل    | به متغیر                     | به محدودیت     |
| الگوریتم حل کارا | ندارد                        | سیمپلکس        |

\* البته فضای جواب در هر دو مورد ممکن است نامحدود باشد.

## مدل سازی با متغیرهای صفر و یک

$$y_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

- ✓ تصمیم های دو گزینه ای
- ✓ بودن یا نبودن
- ✓ انتخاب یا عدم انتخاب
- ✓ اجرا یا عدم اجرا

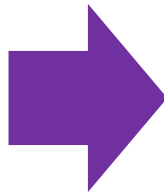


## مدل سازی با متغیرهای صفر و یک

| پروژه                | ۱               | ۲  | ۳ | ۴  | ۵ |
|----------------------|-----------------|----|---|----|---|
| هزینه (میلیون تومان) | ۲               | ۱۲ | ۱ | ۴  | ۱ |
| سود (میلیون تومان)   | ۲               | ۴  | ۲ | ۱۰ | ۱ |
| کل بودجه             | ۱۵ میلیون تومان |    |   |    |   |
| هدف                  | حداکثر کردن سود |    |   |    |   |



$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر پروژه } i \text{ اجرا شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \max z &= 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 10y_4 + y_5 \\ \text{s.t. } & 2y_1 + 12y_2 + y_3 + 4y_4 + y_5 \leq 15 \\ & y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

## متغیرهای ناسازگار

از بین گزینه‌های موجودی می‌خواهیم تعداد مشخصی گزینه انتخاب کنیم.

حالت ۱

دقیقا  $k$  گزینه انتخاب شوند:

$$\sum_{i=1}^n y_i = k$$

حالت ۲

حداکثر  $k$  گزینه انتخاب شوند:

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq k$$

حالت ۳

حداقل  $k$  گزینه انتخاب شوند:

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq k$$

## متغیرهای ناسازگار

**مثال:**  در مساله سرمایه‌گذاری در پروژه‌ها (همان مساله کوله‌پشتی)،

۱- شرکت می‌تواند حداکثر در سه پروژه شرکت کند:  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 3$

۲- شرکت باید حداقل در دو پروژه شرکت کند:  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 2$

## متغیرهای وابسته

مدل کردن گزینه‌هایی که انتخاب یا عدم‌انتخاب یکی، روی دیگری تاثیر دارد.

حالت ۱

انتخاب گزینه  $i$  وابسته به انتخاب گزینه  $j$  است:

$$y_i \leq y_j$$

حالت ۲

گزینه  $i$  و  $j$  به صورت پکیج هستند:

$$y_i = y_j$$

## متغیرهای وابسته

 **مثال:** در مساله سرمایه‌گذاری در پروژه‌ها (همان مساله کوله‌پشتی)،

۱- پروژه ۱ زمانی می‌تواند اجرا شود که پروژه ۲ هم اجرا شود:

$$y_1 \leq y_2$$

۲- پروژه ۳ و ۴ یا با هم اجرا می‌شوند یا هیچکدام اجرا نمی‌شود:

$$y_3 = y_4$$

۳- اگر پروژه ۱ اجرا شود، پروژه ۲ هم باید اجرا شود:

$$y_1 \leq y_2$$

## انتخاب $k$ محدودیت از $n$ محدودیت

از بین دسته‌ای از محدودیت‌ها، فقط به تعداد مشخصی از آن‌ها نیاز است.

$$\begin{cases} g_1(X) \leq b_1 \\ g_2(X) \leq b_2 \\ \mathbf{g_3(X) \geq b_3} \\ \vdots \\ g_n(X) \leq b_n \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر محدودیت / حذف شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(X) \leq b_1 + My_1 \\ g_2(X) \leq b_2 + My_2 \\ \mathbf{g_3(X) \geq b_3 - My_3} \\ \vdots \\ g_n(X) \leq b_n + My_n \end{cases}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = n - k$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

## انتخاب $k$ محدودیت از $n$ محدودیت

**مثال:** از بین محدودیت‌های زیر، باید دقیقا دو محدودیت برقرار باشد:



$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$9x_1 + 5x_2 \geq 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

۲ محدود برقرار ~  
۳ محدود حذف

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 + My_1$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 6 + My_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4 - My_3$$

$$9x_1 + 5x_2 \geq 7 - My_4$$

$$x_1 + x_2 \leq 15 + My_5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_5 = 3$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

## انتخاب $k$ محدودیت از $n$ محدودیت

**مثال:** از بین محدودیت‌های زیر، حداکثر ۴ محدودیت برقرار باشد:



$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 9x_1 + 5x_2 &\geq 7 \\ x_1 + x_2 &= 15 \end{aligned}$$

تبدیل علامت  
مساوی به  
نامساوی

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 9x_1 + 5x_2 &\geq 7 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases} \end{aligned}$$

حداکثر ۴ محدودیت  
برقرار ~ حداقل ۱  
محدودیت حذف

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 + My_1 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 6 + My_2 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4 - My_3 \\ 9x_1 + 5x_2 &\geq 7 - My_4 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 + My_5 \\ x_1 + x_2 \geq 15 - My_5 \end{cases} \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_5 &\geq 1 \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

## انتخاب $k$ محدودیت از $n$ محدودیت

 **مثال:** از بین دو محدودیت زیر، دقیقا یکی برقرار باشد (محدودیت‌های این - یا - آن):

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 6 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 + My_1 \\ x_1 - 4x_2 \leq 6 + My_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{array} \\ & & \xrightarrow{y_2 = 1 - y_1} \\ & & \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 + My_1 \\ x_1 - 4x_2 \leq 6 + M(1 - y_1) \\ y_1 \in \{0,1\} \end{array} \end{array}$$

## محدودیت‌های اگر - آن‌گاه

اگر محدودیت  $f(X)$  برقرار باشد، محدودیت  $g(X)$  نیز باید برقرار باشد و اگر  $f(X)$  برقرار نباشد، محدودیت  $g(X)$  آزاد است.

if  $f(X) > 0$  then  $g(X) \geq 0$

or  $f(X) \leq 0$



$$f(X) > 0 - My$$

$$g(X) \geq 0 - My$$

$$f(X) \leq 0 + M(1 - y)$$



$$g(X) \geq 0 - My$$

$$f(X) \leq 0 + M(1 - y)$$

## محدودیت‌های اگر - آن‌گاه

 **مثال:** متغیرهای  $x_1, x_2, x_3$ ، متغیرهای صفر و یک هستند. اگر  $x_3$  یک شود،  $x_1, x_2$  صفر می‌شوند. اما اگر  $x_3$  صفر شود،  $x_1, x_2$  می‌توانند صفر یا یک شوند.

$$x_3 = (1 - y)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2y$$

$$x_1, x_2, x_3, y \in \{0, 1\}$$

## حداقل مقدار برای یک متغیر

**مثال:**  برای تولید یک محصول جدید (با مقدار  $x_1$ )، به دستگاه خاصی نیاز داریم. خرید این دستگاه زمانی به صرفه است که از محصول موردنظر، حداقل ۱۰۰ واحد تولید کنیم. در غیر این صورت، آن محصول نباید تولید شود.

مدل کردن  
مقدار تولید؟

$$x_1 = 0$$

or

$$x_1 \geq 100$$



$$x_1 \geq 100y_1$$

$$x_1 \leq My_1$$



| حالت | $y_1$ | محدودیت ۱      | محدودیت ۲    | اشتراک         |
|------|-------|----------------|--------------|----------------|
| اول  | ۰     | $x_1 \geq 0$   | $x_1 \leq 0$ | $x_1 = 0$      |
| دوم  | ۱     | $x_1 \geq 100$ | $x_1 \leq M$ | $x_1 \geq 100$ |

## تولید با هزینه ثابت



مدل برنامه  
تولید؟

| سود | هزینه اجاره<br>دستگاه | پارچه<br>(متر) | کارگر<br>(ساعت) |              |
|-----|-----------------------|----------------|-----------------|--------------|
| ۶   | ۲۰۰                   | ۴              | ۳               | پیراهن       |
| ۴   | ۱۵۰                   | ۳              | ۲               | شلوار        |
| -   | ۳۰۰                   | ۱۶۰            | ۱۵۰             | حداکثر منابع |

$$\max z = (6x_1 + 4x_2) - (200y_1 + 150y_2)$$

$$s.t \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 160$$

$$200y_1 + 150y_2 \leq 300$$

$$x_1 \leq My_1$$

$$x_2 \leq My_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

$$x_1 \leq 500y_1$$

$$x_2 \leq 500y_2$$

$x_1$ : مقدار تولید پیراهن  
 $x_2$ : مقدار تولید شلوار  
 $y_1$ : اگر پیراهن تولید شود، ۱ و در غیر این صورت، ۰  
 $y_2$ : اگر شلوار تولید شود، ۱ و در غیر این صورت، ۰

اگر حداکثر مقدار تولید هر محصول ۵۰۰ باشد.

## تبدیل متغیر عدد صحیح به متغیر صفر و یک

اگر  $x$  یک متغیر عدد صحیح باشد که  $0 \leq x \leq u$  و  $2^n \leq u < 2^{n+1}$  آن گاه  $x$  با  $n+1$  متغیر صفر و یک قابل جایگزین است:

$$x = \sum_{i=0}^n 2^i y_i$$
$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

$x$  حتما باید دارای حد  
بالای مشخص باشد

## تبدیل متغیر عدد صحیح به متغیر صفر و یک



مثال:

$$\max z = (2x_1 + x_2)$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{|l|l|} \hline x_1 \leq 8, & x_2 \leq 4 \\ \hline x_1 \leq 3, & x_2 \leq 6 \\ \hline \end{array} \\ \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} x_1 \leq 3 \quad x_2 \leq 4 \end{array} \end{array}$$

$$u_1 = 3$$

$$n_1 = 1$$

$$x_1 = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 = y_0 + 2y_1$$

$$u_2 = 4$$

$$n_2 = 2$$

$$x_2 = 2^0 y'_0 + 2^1 y'_1 + 2^2 y'_2 = y'_0 + 2y'_1 + 4y'_2$$

## تبدیل متغیر عدد صحیح به متغیر صفر و یک

$$\max z = (x_1 + 3x_2)$$

$$s.t \quad x_1 - x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$



$$x_1 \leq \infty,$$

$$x_2 \leq \infty$$



$$x_1 \leq 30,$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 30 \quad x_2 \leq 10$$



$$u_1 = 30 \quad n_1 = 4$$

$$u_2 = 10 \quad n_2 = 3$$

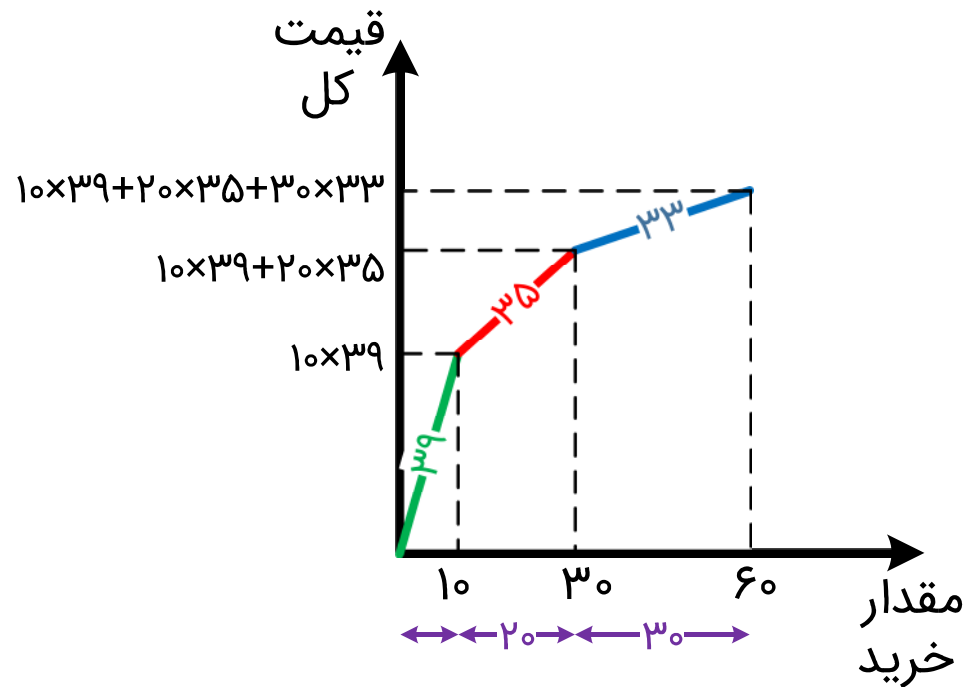


$$x_1 = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 + 2^3 y_3 + 2^4 y_4 = y_0 + 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 16y_4$$

$$x_2 = 2^0 y'_0 + 2^1 y'_1 + 2^2 y'_2 + 2^3 y'_3 = y'_0 + 2y'_1 + 4y'_2 + 8y'_3$$

## توابع قطعه - قطعه خطی

**مثال:** تخفیف افزایشی (Incremental) با هدف **حداقل کردن** هزینه خرید



| بازه قیمت | قیمت | مقدار خرید |
|-----------|------|------------|
| ۱         | ۳۹   | ۰ تا ۱۰    |
| ۲         | ۳۵   | ۱۰ تا ۳۰   |
| ۳         | ۳۳   | ۳۰ تا ۶۰   |

## توابع قطعه - قطعه خطی

$$\min Z = 39x_1 + 35x_2 + 33x_3$$

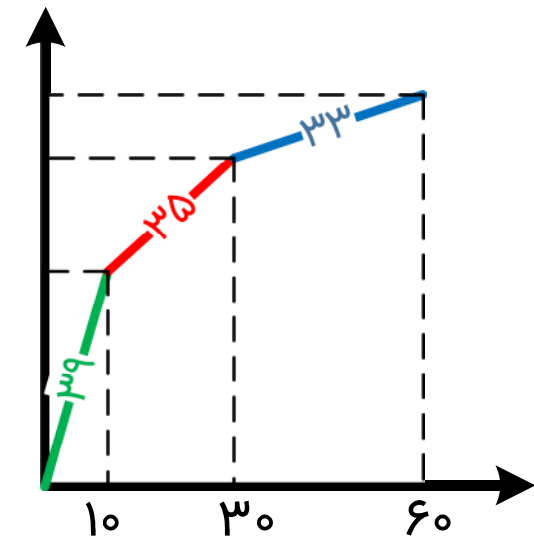
$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 20$$

$$0 \leq x_3 \leq 30$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$x_i$  : مقدار خرید در بازه  $i$



## توابع قطعه - قطعه خطی

### روش ۱

$$\min Z = 39x_1 + 35x_2 + 33x_3$$

$$10y_2 \leq x_1 \leq 10y_1$$

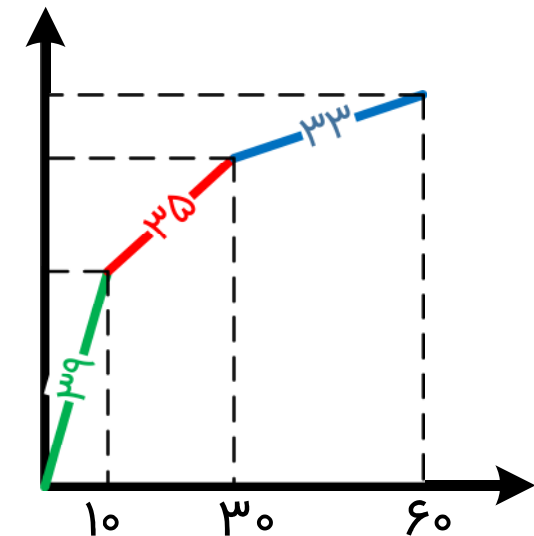
$$20y_3 \leq x_2 \leq 20y_2$$

$$0 \leq x_3 \leq 30y_3$$

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3$$

$$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\} \forall i$$

$x_i$  : مقدار خرید در بازه  $i$   
 $y_i$  : اگر شامل قطعه  $i$  شود، ۱ و  
 در غیر این صورت، ۰



## توابع قطعه - قطعه خطی

### روش ۲

$$\min Z = 39x_1 + 35x_2 + 33x_3$$

$$10y_1 \leq x_1 \leq 10$$

$$20y_2 \leq x_2 \leq 20y_1$$

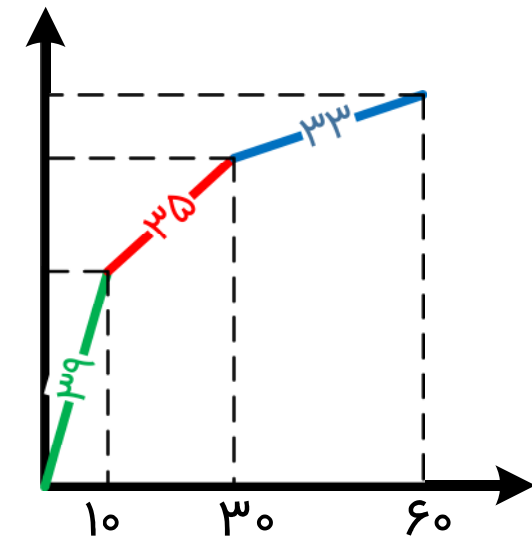
$$30y_3 \leq x_3 \leq 30y_2$$

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3$$

$$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\} \forall i$$

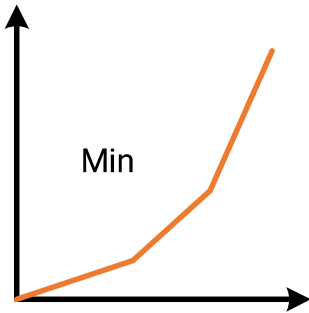
$x_i$  : مقدار خرید در بازه  $i$

$y_i$  : اگر قطعه  $i$  به حد بالای خود  
برسد، ۱ و در غیر این صورت، ۰

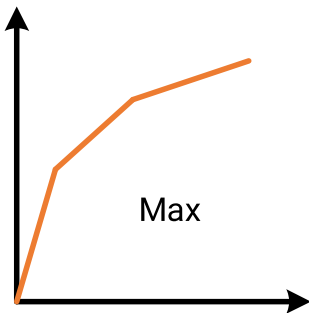


## توابع قطعه - قطعه خطی

**نکته:** اگر مساله به صورت Min سازی و تابع قطعه‌ای محدب باشد، نیازی به استفاده از متغیرهای صفر و یک نیست.



**نکته:** اگر مساله به صورت Max سازی و تابع قطعه‌ای مقعر باشد، نیازی به استفاده از متغیرهای صفر و یک نیست.



## حل مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح

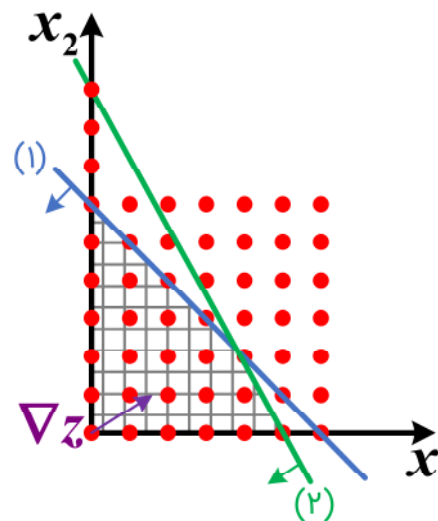
| $x_1$ | $x_2$ | $z$ |
|-------|-------|-----|
| ۰     | ۰     | ۰   |
| ۰     | ۱     | ۵   |
| ۰     | ۲     | ۱۰  |
| ۰     | ۳     | ۱۵  |
| ۰     | ۴     | ۲۰  |
| ۰     | ۵     | ۲۵  |
| ۰     | ۶     | ۳۰  |
| ۱     | ۰     | ۸   |
| ۱     | ۱     | ۱۳  |
| ۱     | ۲     | ۱۸  |
| ۱     | ۳     | ۲۳  |
| ۱     | ۴     | ۲۸  |
| ۱     | ۵     | ۳۳  |

| $x_1$ | $x_2$ | $z$ |
|-------|-------|-----|
| ۲     | ۰     | ۱۶  |
| ۲     | ۱     | ۲۱  |
| ۲     | ۲     | ۲۶  |
| ۲     | ۳     | ۳۱  |
| ۲     | ۴     | ۳۶  |
| ۳     | ۰     | ۲۴  |
| ۳     | ۱     | ۲۹  |
| ۳     | ۲     | ۳۴  |
| ۳     | ۳     | ۳۹  |
| ۴     | ۰     | ۳۲  |
| ۴     | ۱     | ۳۷  |
| ۵     | ۰     | ۴۰  |

$$\begin{aligned}
 IP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\
 x_1, x_2 &\geq 0, \text{int}
 \end{aligned}$$

جواب بهینه LP

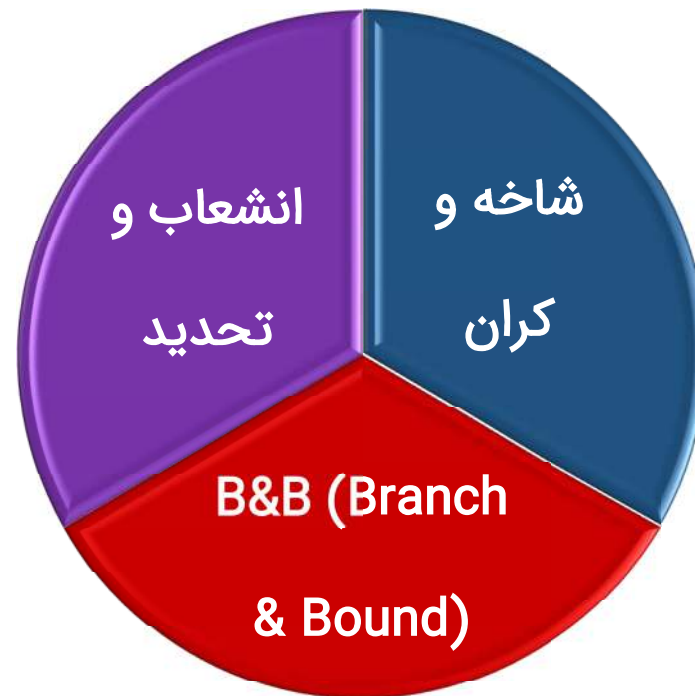
$$\begin{cases}
 x_1^* = 3.75 \\
 x_2^* = 2.25 \\
 z^* = 41.25
 \end{cases}$$



## الگوریتم‌های حل مسایل عدد صحیح

- ۱ شاخه و کران برای مسایل MIP و PIP
- ۲ شاخه و کران برای مسایل BIP
- ۳ صفحات برشی

## الگوریتم شاخه و کران

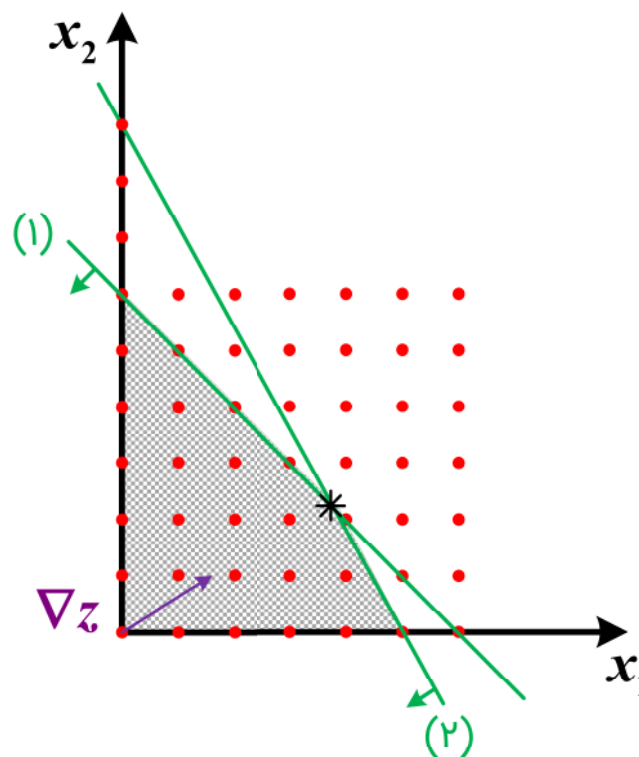


## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

$$\begin{aligned}
 IP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t. } (1) \quad &x_1 + x_2 \leq 6 \\
 (2) \quad &9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\
 &x_1, x_2 \geq 0, \text{int}
 \end{aligned}$$

جواب بهینه LP

$$\begin{cases}
 x_1^* = 3.75 \\
 x_2^* = 2.25 \\
 z^* = 41.25
 \end{cases}$$



A

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

$$z_L = -\infty$$

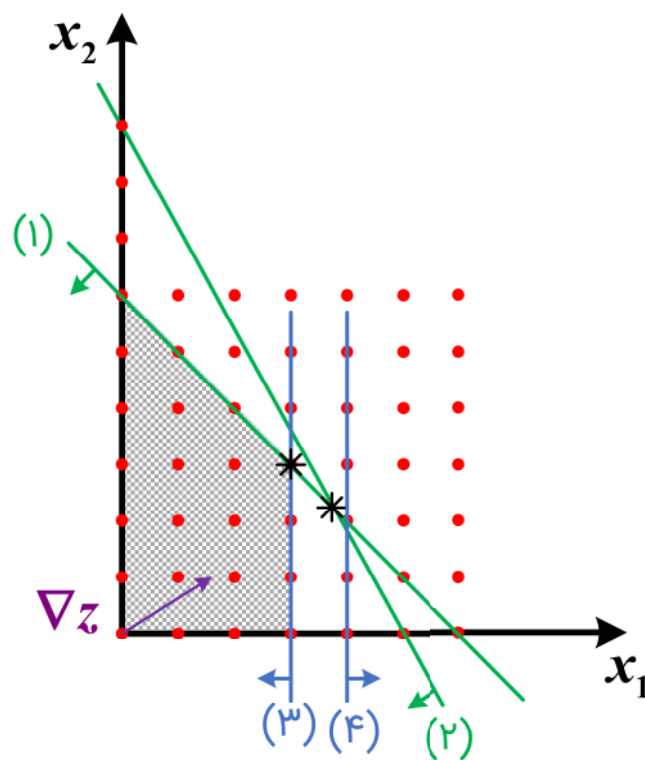
A

(3.75, 2.25)

$z = 41.25$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

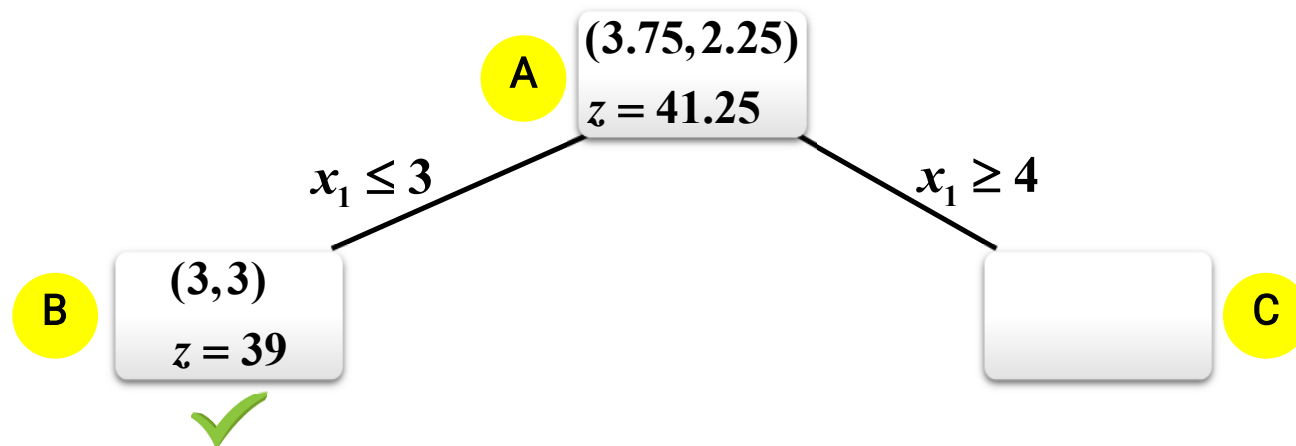
B



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

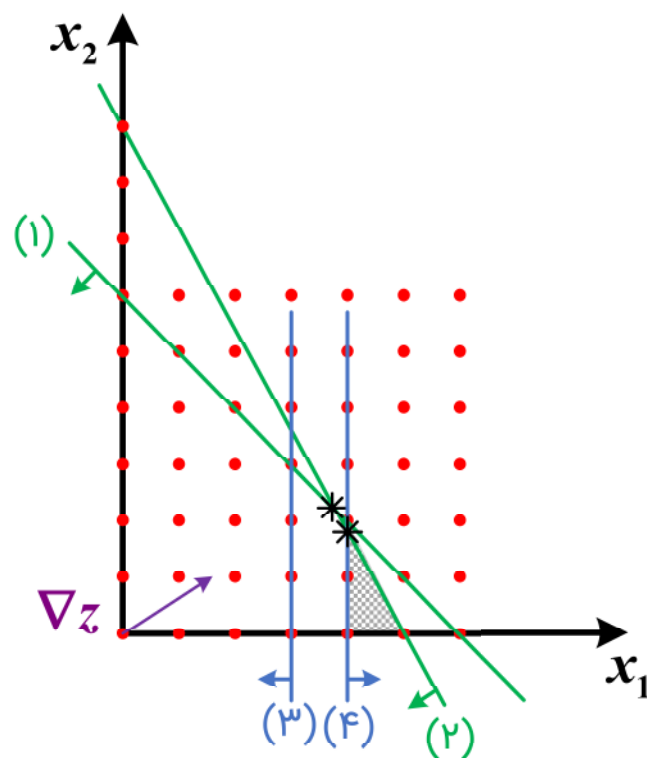
$$\cancel{z_L = -\infty}$$

$$z_L = 39$$



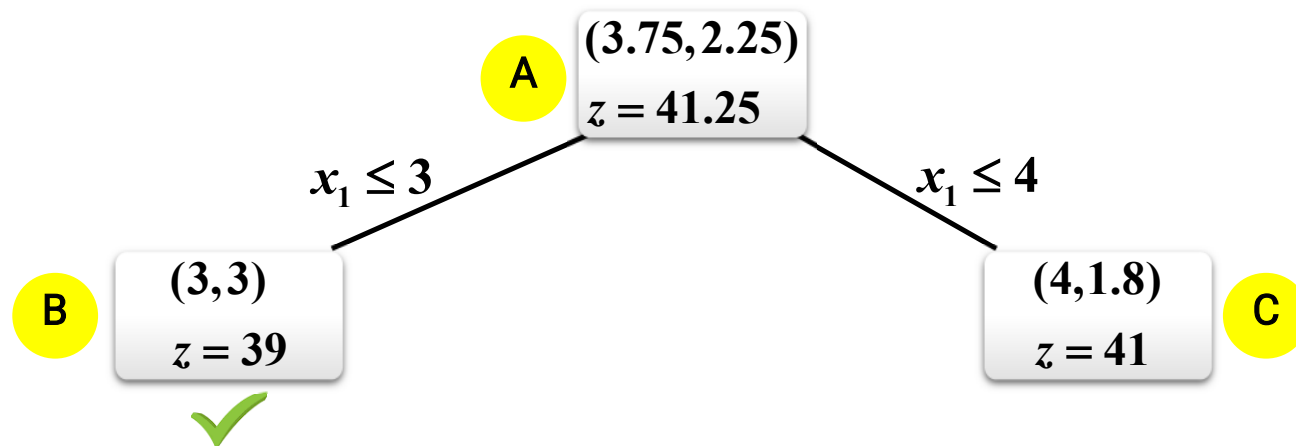
## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

C



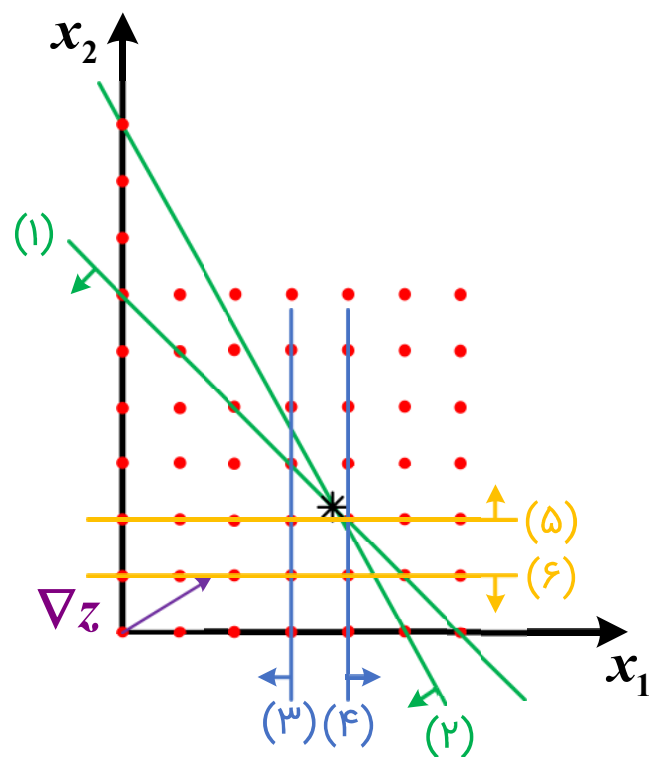
## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

~~$z_L = -\infty$~~   
 $z_L = 39$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

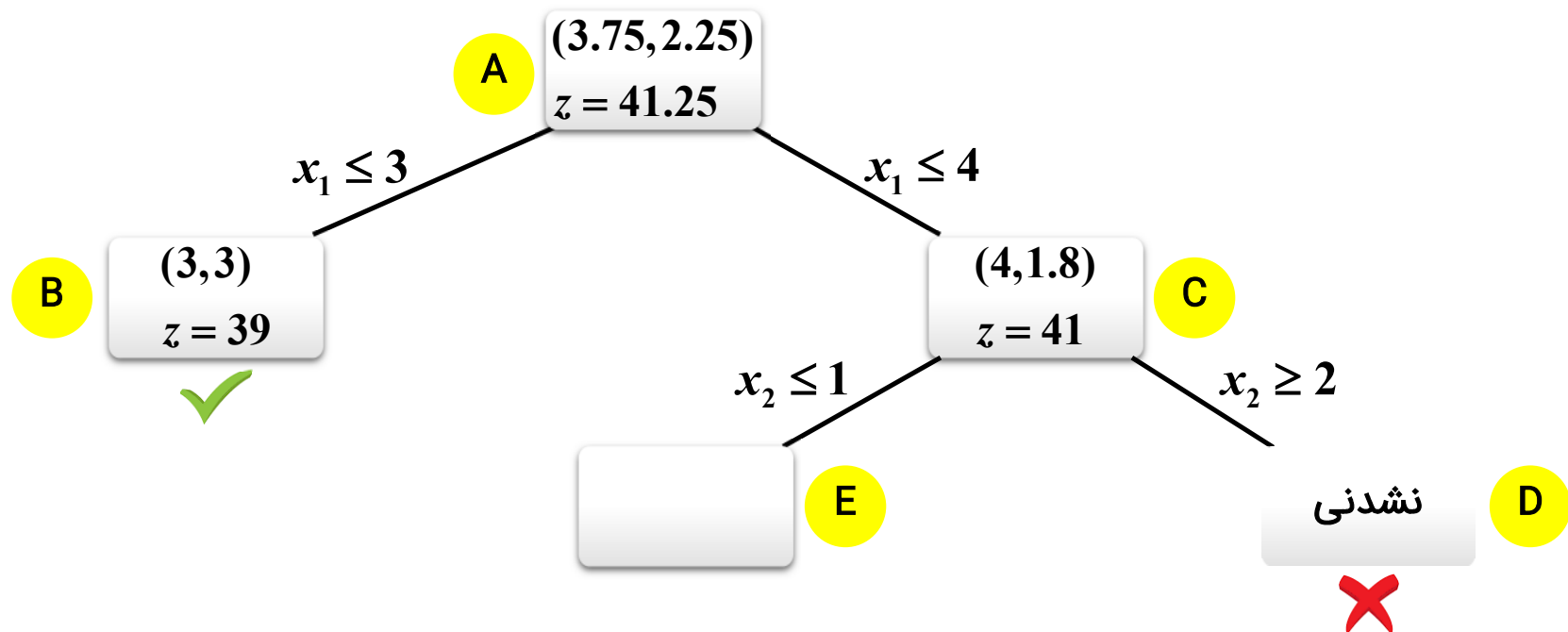
D



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

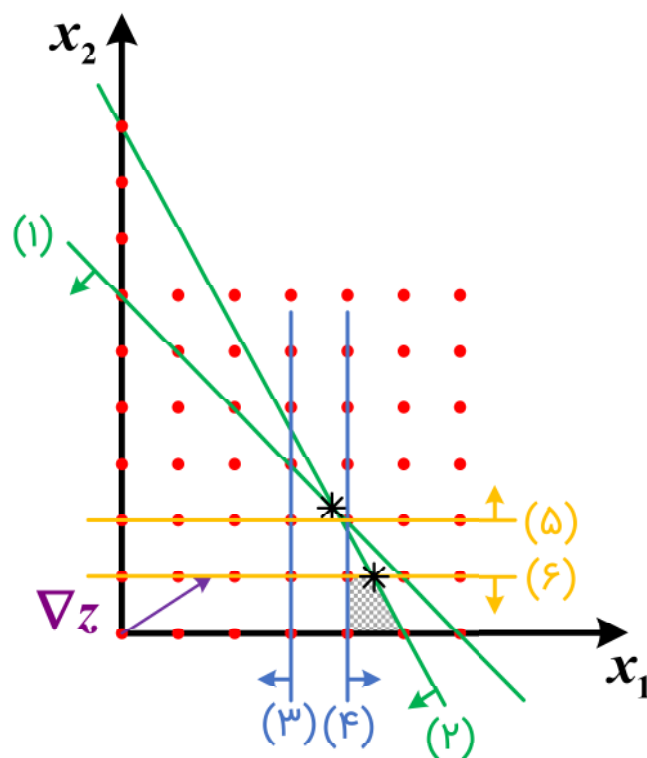
$$\cancel{z_L = -\infty}$$

$$z_L = 39$$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

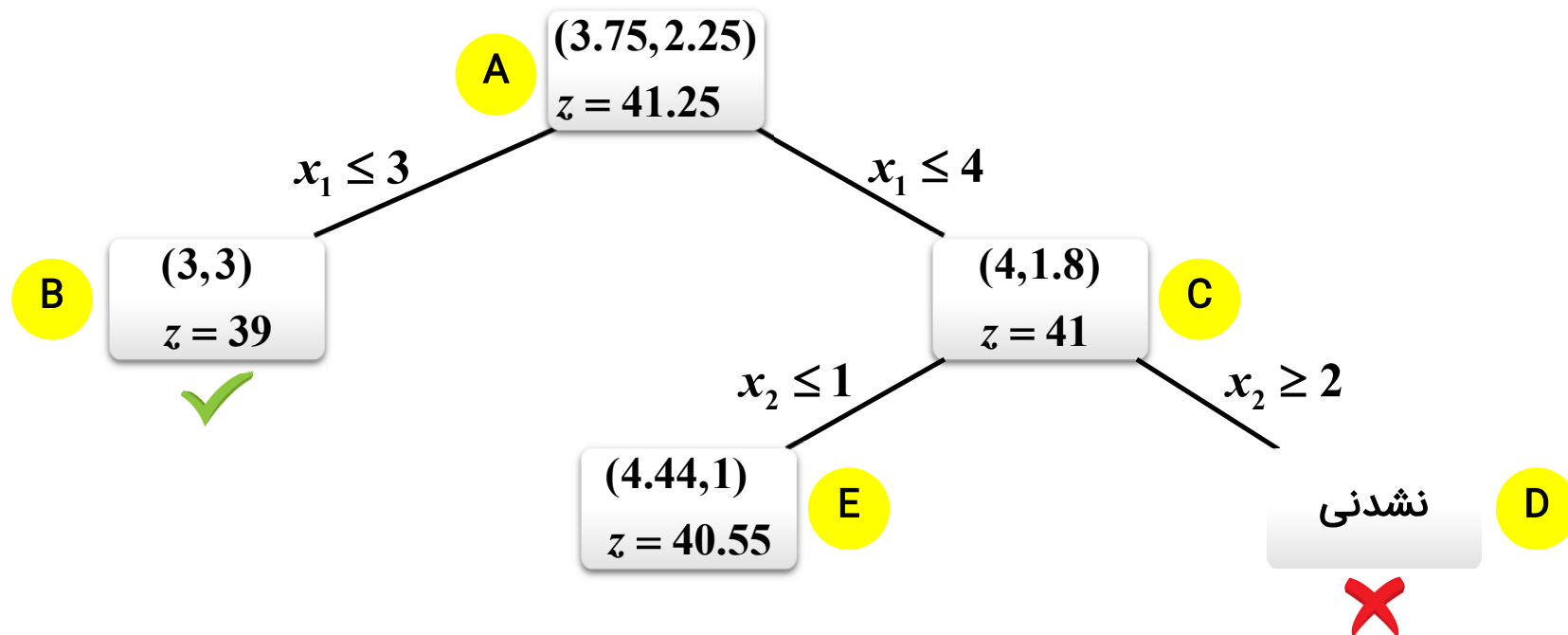
E



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

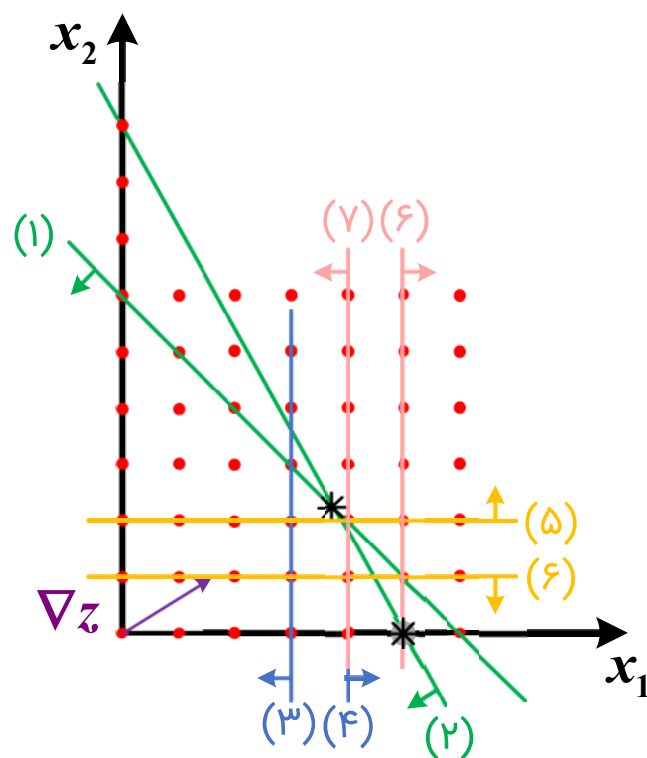
$$\cancel{z_L = -\infty}$$

$$z_L = 39$$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

F

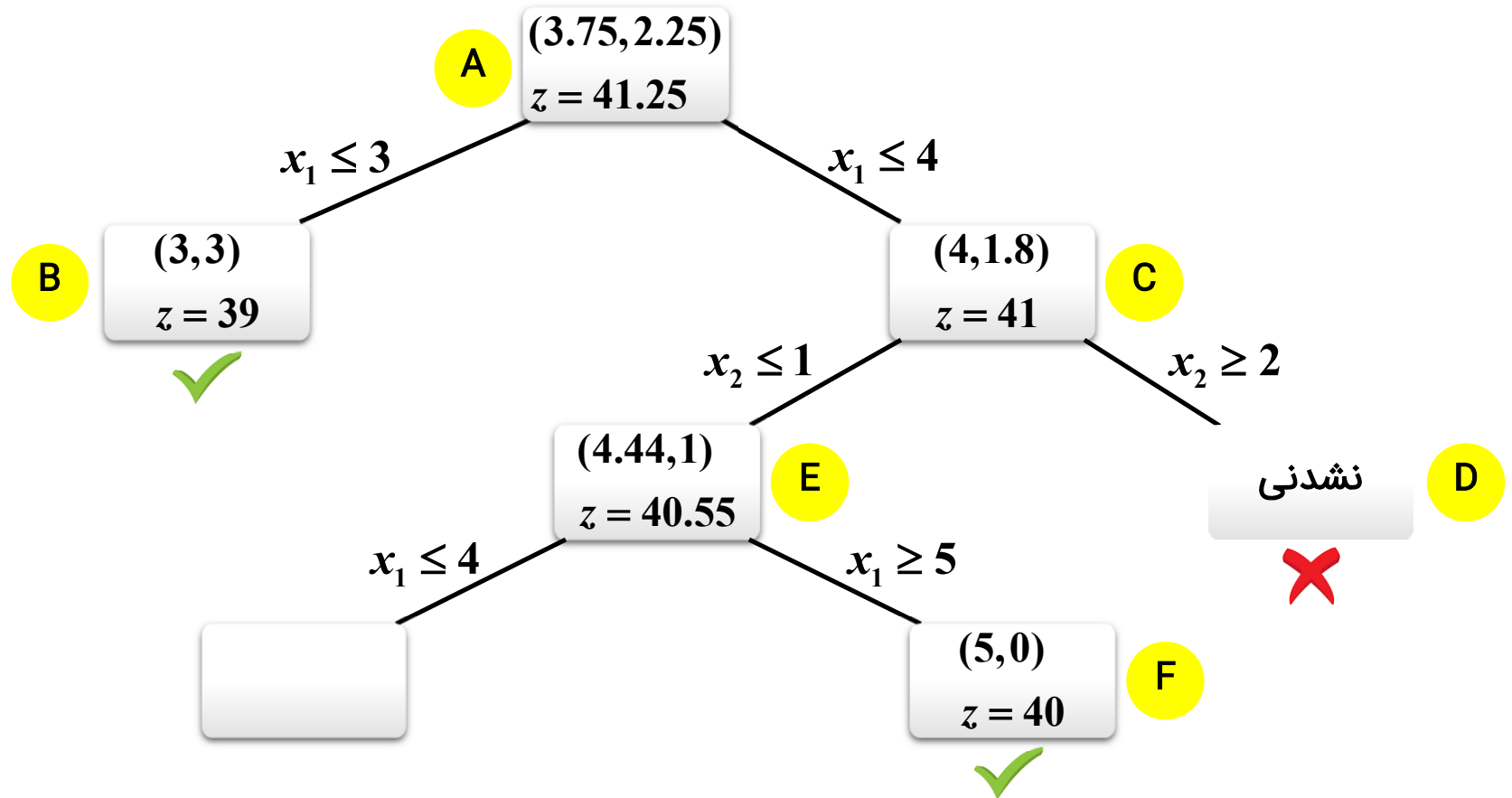


## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

$$\cancel{z_L = -\infty}$$

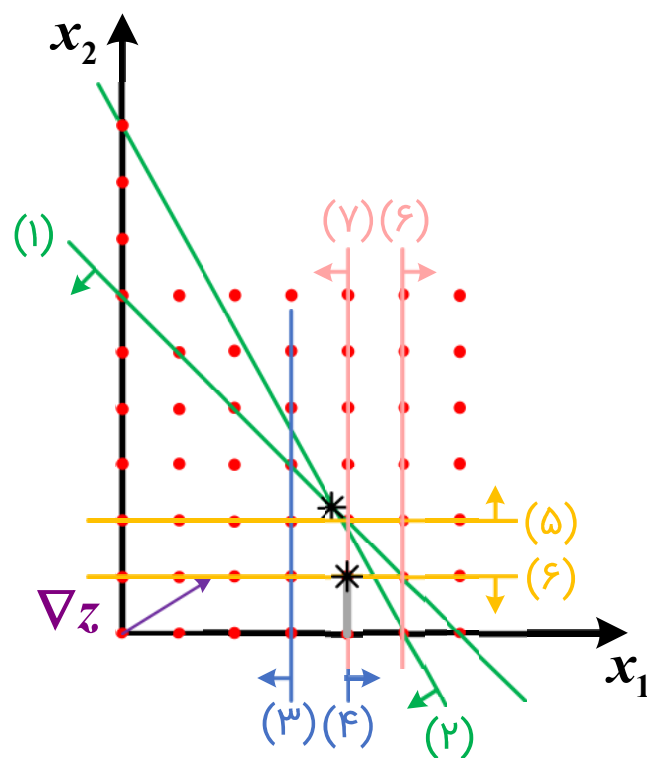
$$\cancel{z_L = 39}$$

$$z_L = 40$$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

G

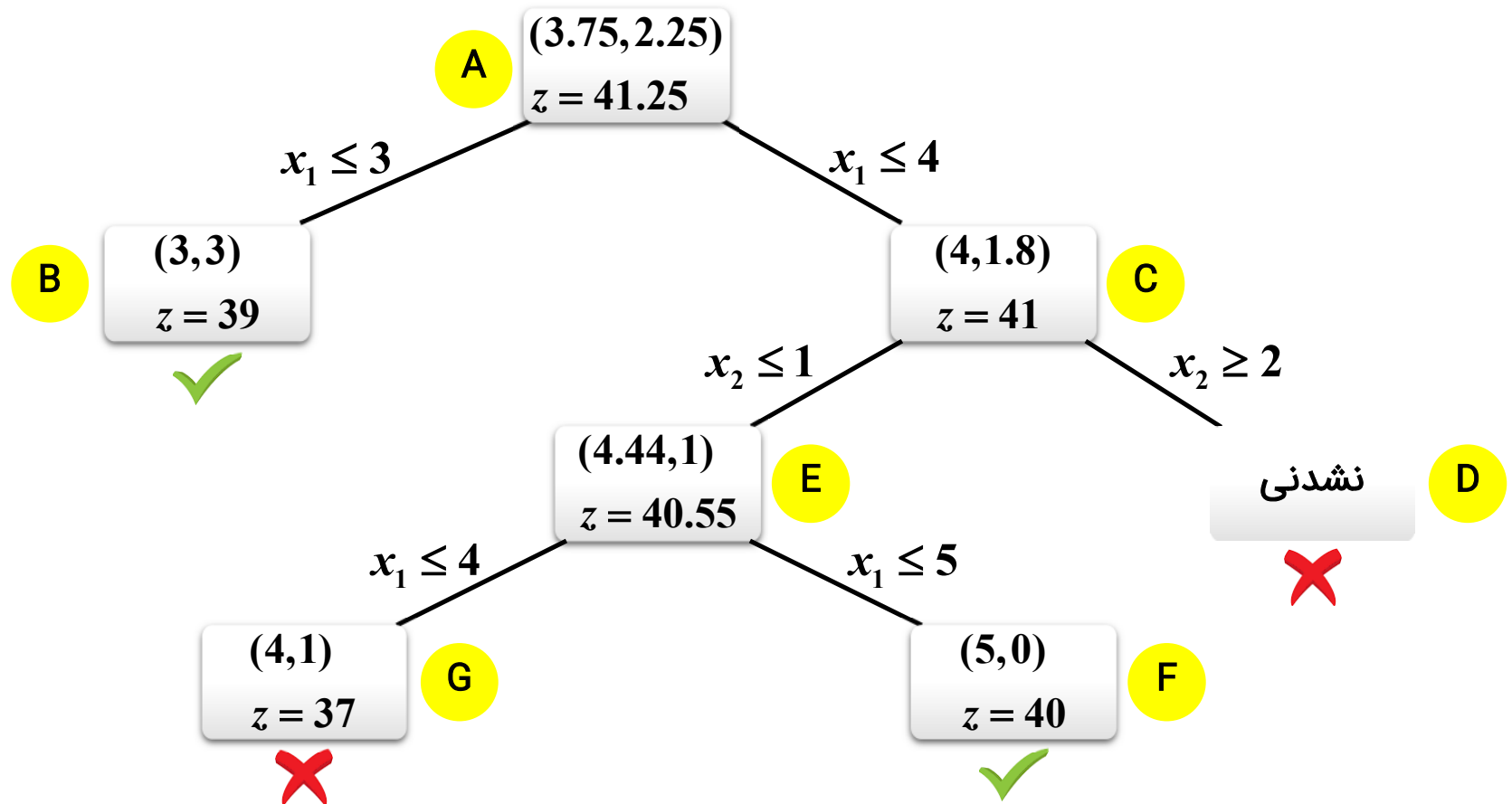


## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

$$\cancel{z_L = -\infty}$$

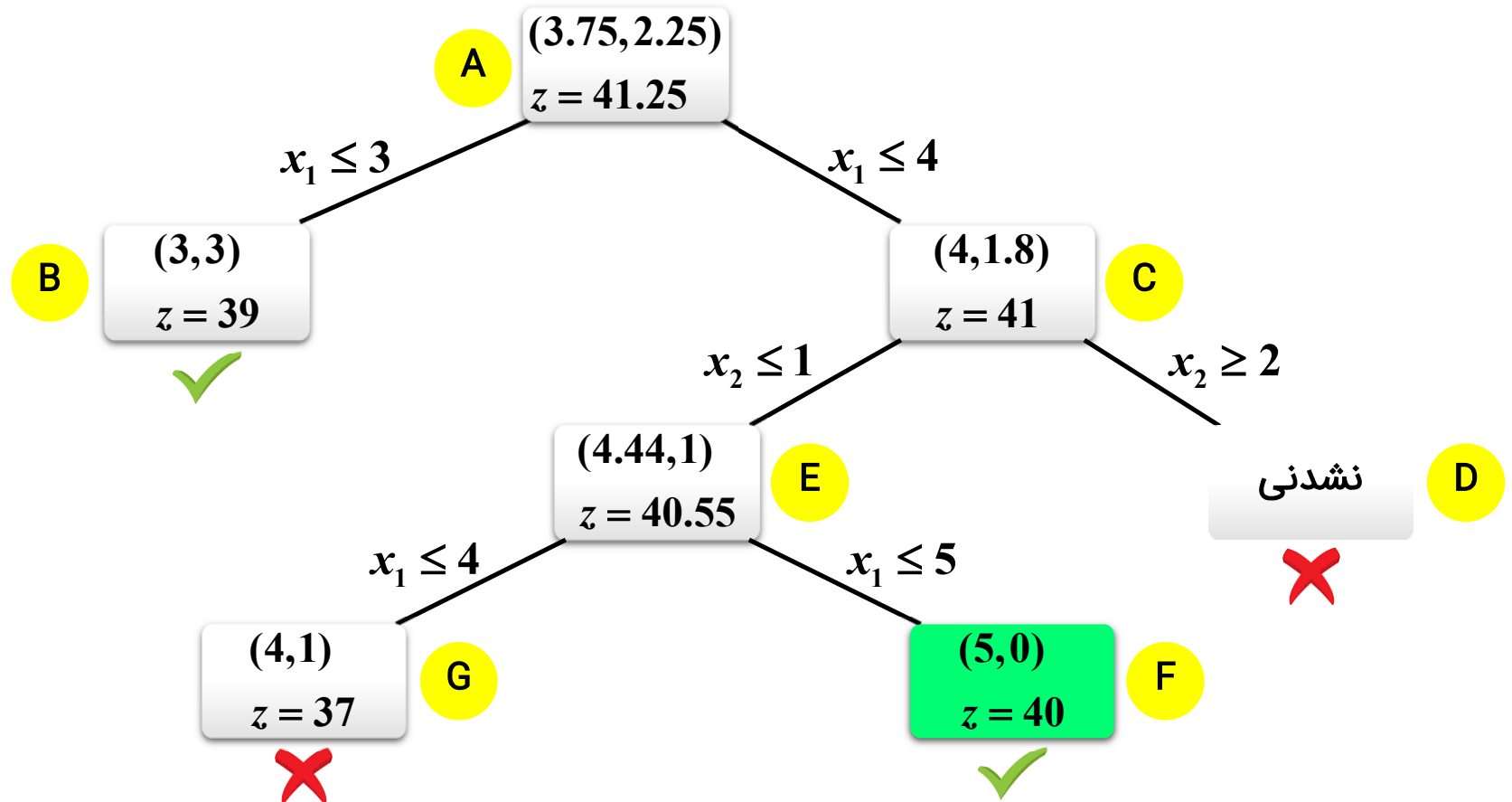
$$\cancel{z_L = 39}$$

$$z_L = 40$$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

~~$z_L = -\infty$~~   
 ~~$z_L = 39$~~   
 $z_L = 40$   
 $z^* = 40$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

گام ۱

- ❖  $z_L = -\infty$  را به عنوان حد پایین تابع هدف قرار دهید.
- ❖ با آزادسازی قید صحیح بودن متغیرها، مساله LP را حل کنید. اگر جواب به دست آمده عدد صحیح بود، توقف کنید. این جواب، جواب بهینه است. در غیر این صورت، به گام بعد بروید.

گام ۲

- ❖ در گره جاری، روی یکی از متغیرهای با مقدار اعشاری، شاخه بزنید. گره موردنظر به دو زیر مجموعه تجزیه می شود. جواب LP را برای گره های جدید به دست آورید.

گام ۳

- ❖ هر گره در یکی از سه حالت زیر به انتها می رسد:
  - ۱- اگر دارای فضای شدنی نباشد.
  - ۲- اگر جواب آن، عدد صحیح باشد. در این صورت، اگر تابع هدف آن از  $z_L$  بهتر بود،  $z_L$  با مقدار جدید آپدیت می شود.
  - ۳- اگر جواب آن عدد صحیح نباشد و تابع هدف از  $z_L$  بدتر باشد.

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

گام ۴

❖ در صورتی که یک گره به انتها نرسد، به گام ۲ بر می‌گردیم.

گام ۵

❖ با به اتمام رسیدن تمام گره‌ها، آخرین  $z_L$ ، تابع هدف بهینه خواهد بود و جواب متناظر با آن جواب بهینه است.



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل PIP

**نکته: تفاوت مساله Min با Max:**

✓ به جای حد پایین  $z_L = -\infty$  برای تابع هدف (در گام اول)، حد بالای  $z_U = +\infty$  خواهیم داشت.

**نکته: تفاوت مساله MIP با PIP:**

✓ فقط روی متغیرهایی که int هستند شاخه می‌زنیم (الزامی به صحیح شدن سایر متغیرها نیست!)

**نکته: قواعد ترتیب شاخه زدن:**

- ✓ جدیدترین شاخه
- ✓ بهترین شاخه
- ✓ بیشترین مقدار اعشار

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

❖ مساله را به حالت استاندارد زیر تبدیل کنید:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq b_i \quad \forall i$$

$$y_j \in \{0,1\}$$

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$$

گام ۱

❖ به همه متغیرها مقدار صفر اختصاص دهید و قرار دهید  $Z_u = \infty$ .

گام ۲

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

گام ۳

❖ اگر جواب فعلی موجه بود (در محدودیت‌ها صدق کرد)، توقف کنید. همین جواب، جواب بهینه است. در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

گام ۴

❖ آیا در ادامه، با مقدار دادن به متغیرها در بهترین حالت، امکان موجه شدن جواب وجود دارد؟

۱- اگر پاسخ خیر است، توقف کنید چون شاخه موردنظر جواب موجه ندارد.

۲- اگر پاسخ بله است، متغیر بعدی مساله را شاخه بزنید و به گام ۵ بروید.

گام ۵

❖ حد پایین  $Z_1$  شاخه جدید را با تخصیص عدد ۱ به متغیر بعدی آن شاخه به دست آورید.

❖  $Z_1$  را با  $Z_{//}$  مقایسه کنید. اگر  $Z_1 \geq Z_{//}$  باشد، آن شاخه به انتها می‌رسد. در غیر این، روی صورت، روی متغیر بعدی شاخه بزنید و به گام ۳ برگردید.

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP



$$\begin{array}{ll} \max z = 3y_1 + 5y_2 - 6y_3 + 9y_4 - 10y_5 - 11y_6 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + 6y_2 + 3y_3 + 4y_4 - y_5 + 2y_6 \leq 6 \end{array}$$

$$5y_1 + 3y_2 + y_3 - 3y_4 - 2y_5 + y_6 \geq 3$$

$$-5y_1 + y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 - y_6 \geq 1$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

$\times(-1)$

$$\begin{array}{ll} \min(-z) = -3y_1 - 5y_2 + 6y_3 - 9y_4 + 10y_5 + 11y_6 \\ \text{s.t.} & 2y_1 - 6y_2 - 3y_3 - 4y_4 + y_5 - 2y_6 \geq -6 \end{array}$$

$$5y_1 + 3y_2 + y_3 - 3y_4 - 2y_5 + y_6 \geq 3$$

$$-5y_1 + y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 - y_6 \geq 1$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

$$\begin{array}{l} y_1 = (1 - y'_1) \\ y_2 = (1 - y'_2) \\ y_4 = (1 - y'_4) \\ -z = z' \end{array}$$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

$$\min z' = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 9y_4 + 10y_5 + 11y_6 - 17$$

$$\text{s.t.} \quad -2y_1' + 6y_2' - 3y_3 + 4y_4' + y_5 - 2y_6 \geq -6 - 2 + 6 + 4$$

$$-5y_1' - 3y_2' + y_3 + 3y_4' - 2y_5 + y_6 \geq 3 - 5 - 3 + 3$$

$$5y_1' - y_2' + 4y_3 - 2y_4' + 2y_5 - y_6 \geq 1 + 5 - 1 - 2$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

$$\min z' = 3y_1' + 5y_2' + 6y_3 + 9y_4' + 10y_5 + 11y_6 - 17$$

$$\text{s.t.} \quad -2y_1' + 6y_2' - 3y_3 + 4y_4' + y_5 - 2y_6 \geq 2$$

$$-5y_1' - 3y_2' + y_3 + 3y_4' - 2y_5 + y_6 \geq -2$$

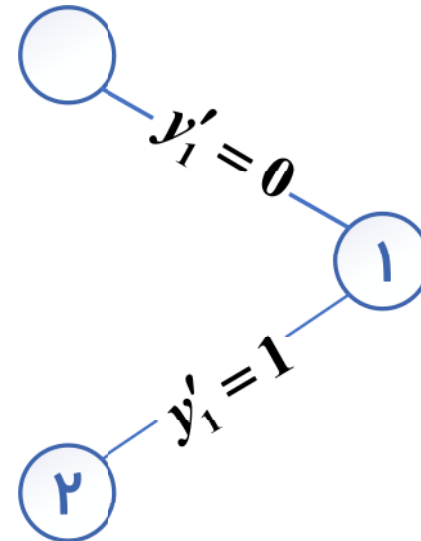
$$5y_1' - y_2' + 4y_3 - 2y_4' + 2y_5 - y_6 \geq 3$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

$$z'_u = \infty$$

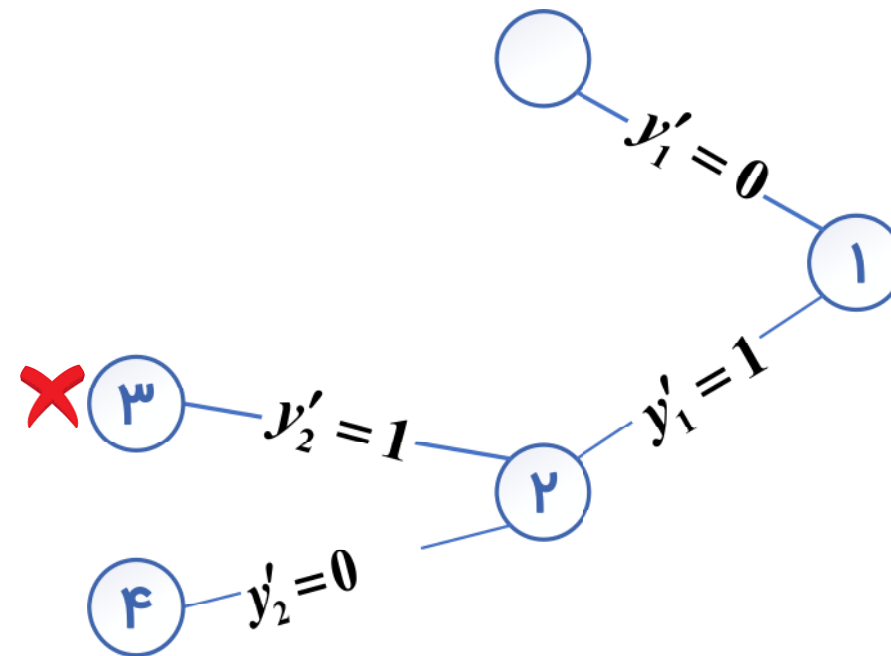
$$z'_l = 3 - 17 + 5 = -9 \quad (2)$$



$$\begin{aligned} \min z' &= 3y'_1 + 5y'_2 + 6y_3 + 9y'_4 + 10y_5 + 11y_6 - 17 \\ \text{s.t.} \quad &-2y'_1 + 6y'_2 - 3y_3 + 4y'_4 + y_5 - 2y_6 \geq 2 \\ &-5y'_1 - 3y'_2 + y_3 + 3y'_4 - 2y_5 + y_6 \geq -2 \\ &5y'_1 - y'_2 + 4y_3 - 2y'_4 + 2y_5 - y_6 \geq 3 \\ &y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

$$z'_u = \infty$$



$$z'_l = 3 - 17 + 5 = -9 \quad (2)$$

محدودیت دوم نشدنی (3)

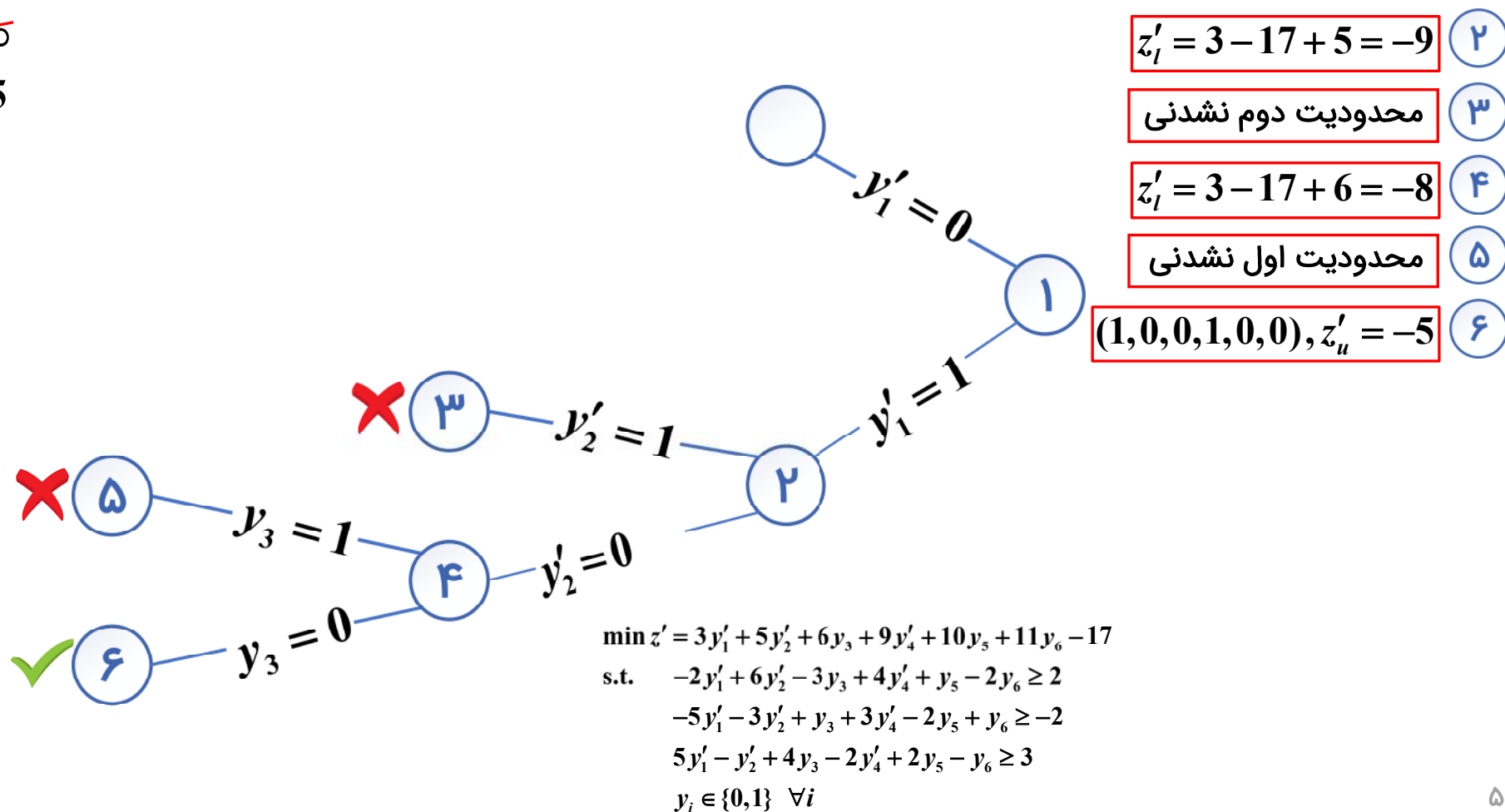
$$z'_l = 3 - 17 + 6 = -8 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \min z' &= 3y'_1 + 5y'_2 + 6y_3 + 9y'_4 + 10y_5 + 11y_6 - 17 \\ \text{s.t.} \quad &-2y'_1 + 6y'_2 - 3y_3 + 4y'_4 + y_5 - 2y_6 \geq 2 \\ &-5y'_1 - 3y'_2 + y_3 + 3y'_4 - 2y_5 + y_6 \geq -2 \\ &5y'_1 - y'_2 + 4y_3 - 2y'_4 + 2y_5 - y_6 \geq 3 \\ &y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

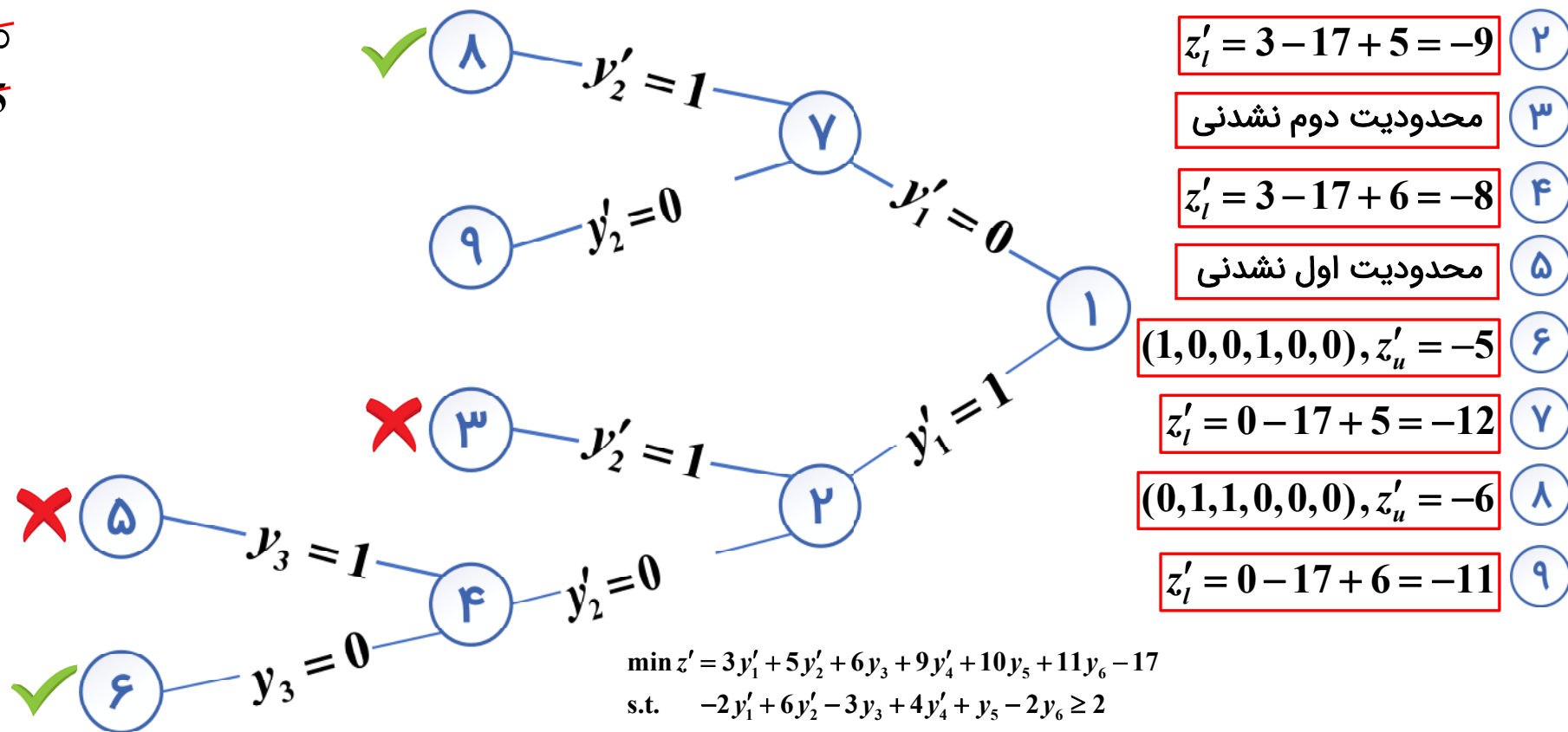
~~$z'_u = \infty$~~

$z'_u = -5$

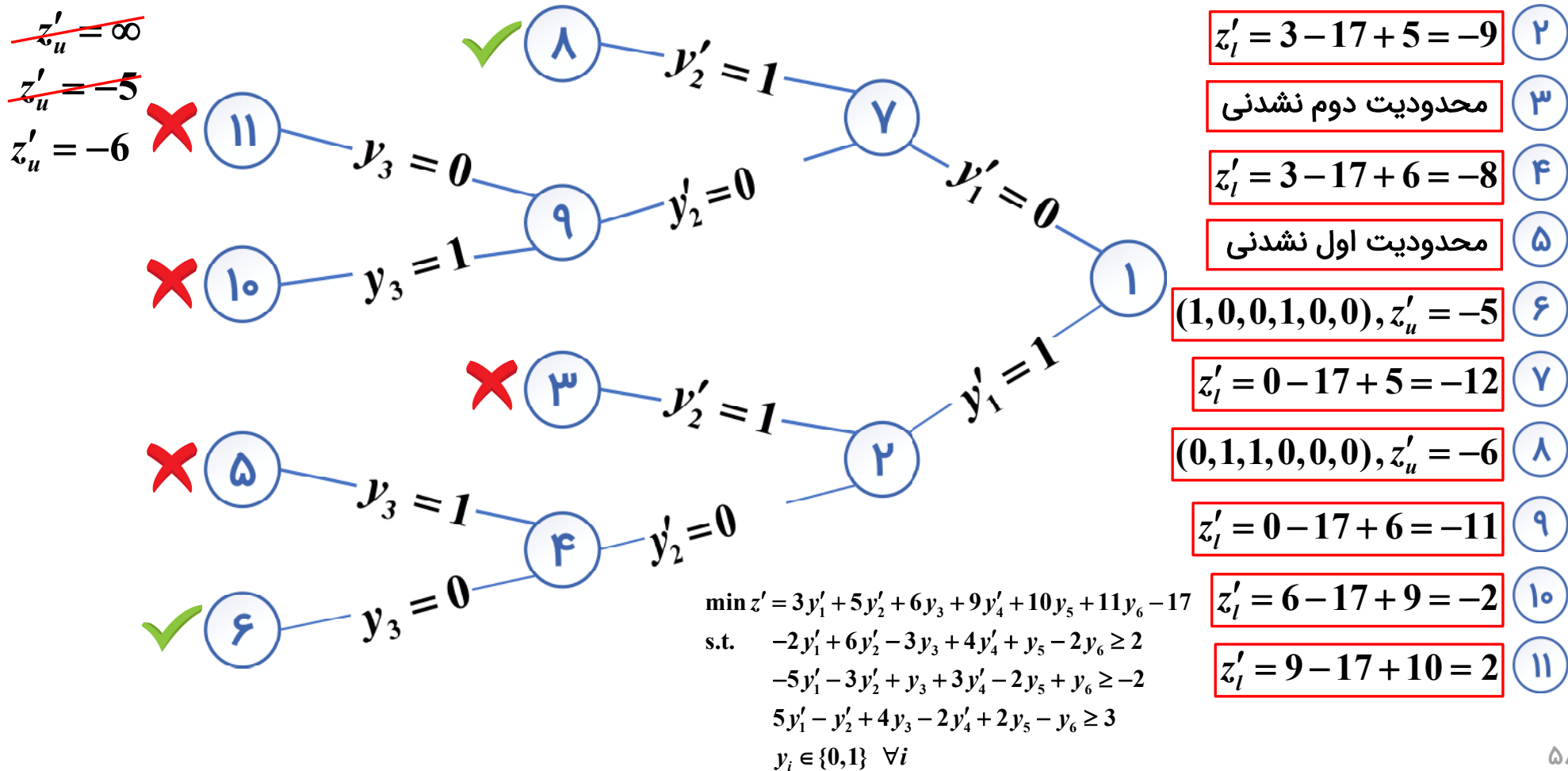


## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

$$\begin{aligned} \cancel{z'_u} &= \infty \\ \cancel{z'_u} &= -5 \\ z'_u &= -6 \end{aligned}$$



## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

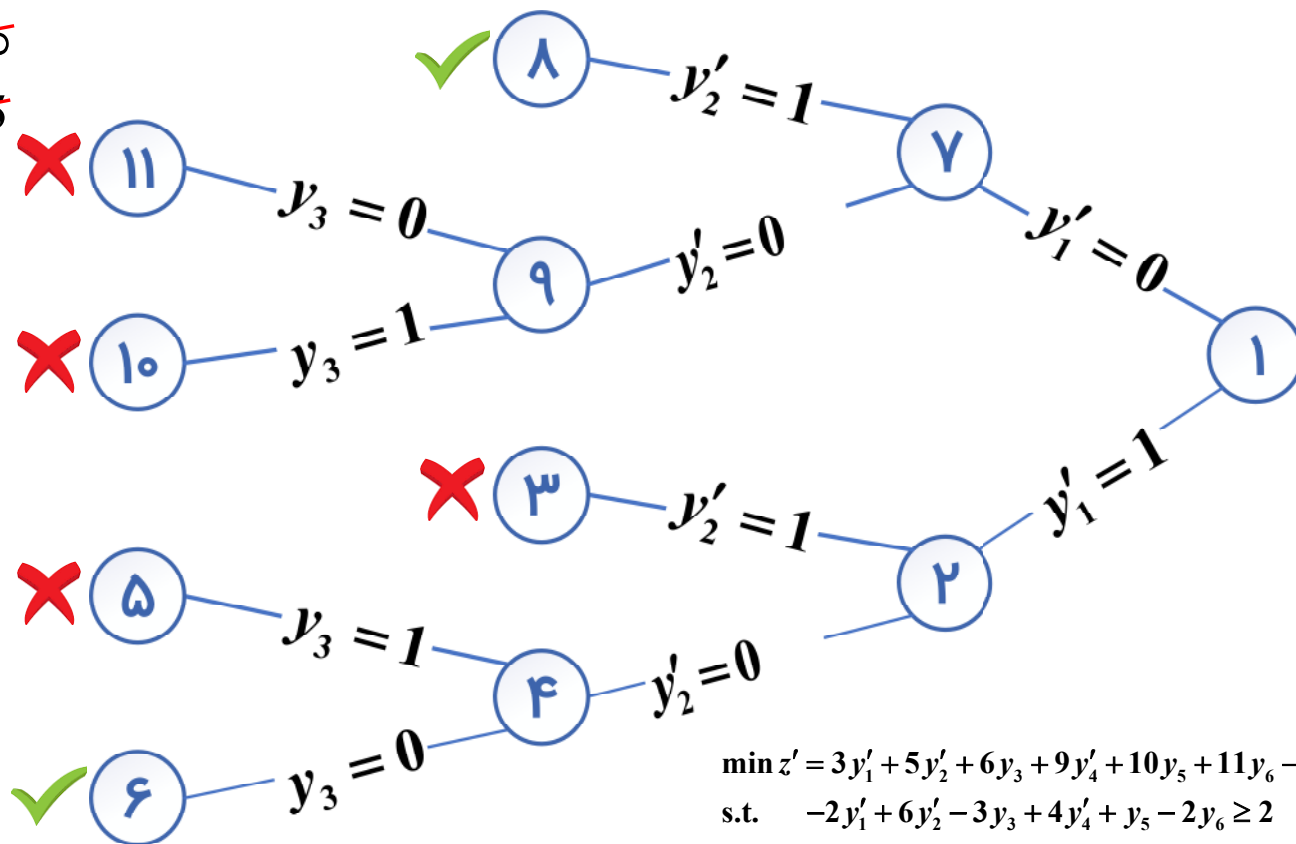


## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

~~$z'_u = \infty$~~

~~$z'_u = -5$~~

~~$z'_u = -6$~~



$z'_l = 3 - 17 + 5 = -9$

محدودیت دوم نشدنی

$z'_l = 3 - 17 + 6 = -8$

محدودیت اول نشدنی

$(1, 0, 0, 1, 0, 0), z'_u = -5$

$z'_l = 0 - 17 + 5 = -12$

$(0, 1, 1, 0, 0, 0), z'_u = -6$

$z'_l = 0 - 17 + 6 = -11$

$z'_l = 6 - 17 + 9 = -2$

$z'_l = 9 - 17 + 10 = 2$

## الگوریتم شاخه و کران برای مسایل BIP

خلاصه گام‌های  
الگوریتم

### آزمون اول

- آیا شاخه، شدنی است؟

### آزمون دوم

- اگر شاخه، شدنی نیست، آیا می‌تواند جواب شدنی داشته باشد؟

### آزمون سوم

- مقایسه حد پایین شاخه با حد بالای مساله

## الگوریتم صفحات برشی

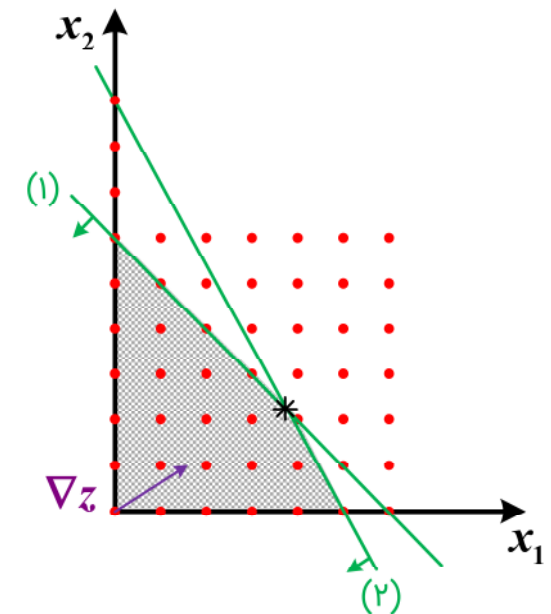
$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

استاندارد

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + s_1 &= 6 \\ 9x_1 + 5x_2 + s_2 &= 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

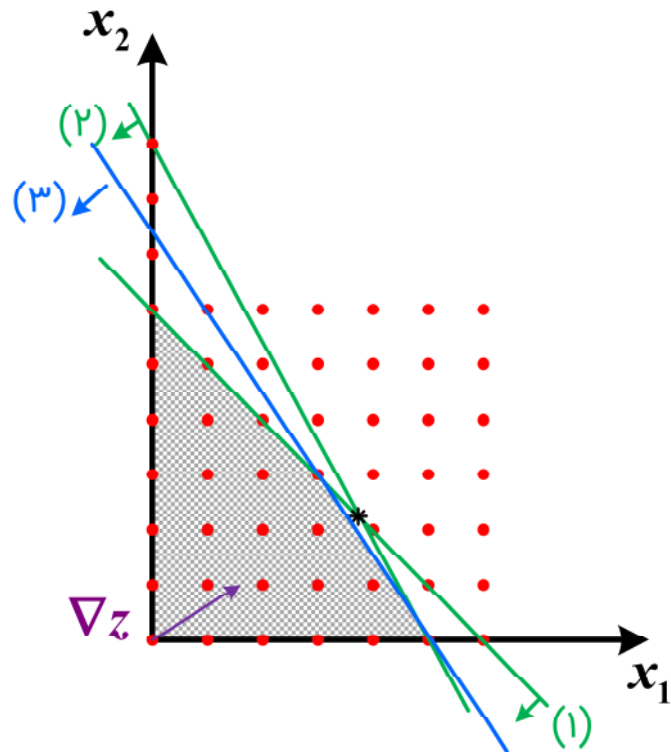
|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | RHS   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $z$   | 0     | 0     | 1/25  | 0/75  | 41/25 |
| $x_1$ | 1     | 0     | -1/25 | 0/25  | 3/25  |
| $x_2$ | 0     | 1     | 2/25  | -0/25 | 2/25  |

جدول سیمپلکس بهینه مساله LP



فضای جواب مدل LP

## الگوریتم صفحات برشی



|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | RHS  |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $z$   |       |       |       |       |      |
| $x_1$ | 1     | 0     | -1/25 | 0/25  | 3/25 |
| $x_2$ |       |       |       |       |      |

$$-1.25 = [-1.25] + 0.75$$

$$0.25 = [0.25] + 0.25$$

$$0.75$$

معادله برش برای متغیر  $x_1$ :

$$-0.75s_1 - 0.25s_2 \leq -0.75$$

$$s_1 = 6 - x_1 - x_2$$

$$s_2 = 45 - 9x_1 - 5x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$

## الگوریتم صفحات برشی

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $z$   | 0     | 0     | 1/25  | 0/75  | 0     | 41/25 |
| $x_1$ | 1     | 0     | -1/25 | 0/25  | 0     | 3/25  |
| $x_2$ | 0     | 1     | 2/25  | -0/25 | 0     | 2/25  |
| $s_3$ | 0     | 0     | -0/75 | -0/25 | 1     | -0/75 |

|       |   |   |   |      |       |    |
|-------|---|---|---|------|-------|----|
| $z$   | 0 | 0 | 0 | 0/33 | 1/67  | 40 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0/67 | -1/67 | 5  |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | -1   | 3     | 0  |
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | 0/33 | -1/33 | 1  |

و عدد صحیح  
جدول بهینه

$$-0.75s_1 - 0.25s_2 \leq -0.75$$

استاندارد

$$-0.75s_1 - 0.25s_2 + s_3 = -0.75$$

سیمپلکس دوگان:

۱- خارج شونده: منفی ترین RHS

۲- وارد شونده: آزمون min نسبت سطر صفر

$$\min \left\{ \left| \frac{1.25}{-0.75} \right|, \left| \frac{0.75}{-0.25} \right| \right\} = 1.67$$

۳- به روز کردن جدول: ایجاد ستون یکه

برای وارد شونده

## الگوریتم صفحات برشی

گام ۱

- ❖ مساله LP آزاد شده را با روش سیمپلکس حل کنید.
- ❖ اگر جواب به دست آمده عدد صحیح بود، توقف کنید. این جواب، جواب بهینه است. در غیر این صورت به مرحله بعد بروید.

گام ۲

- ❖ در جدول سیمپلکس موجود، محدودیتی که دارای بزرگتر مقدار اعشار در RHS ( $f_i$ ) است را برای نوشتن معادله برش انتخاب کنید. در صورتی که بیش از یک سطر با چنین شرایطی وجود دارد، سطری انتخاب می شود که بزرگترین  $f_i / \sum_j f_{ij}$  را دارا باشد.
- ❖ معادله برش سطر  $i$  به صورت  $-\sum_j f_{ij} w_j \leq -f_i$  خواهد بود:
  - $f_i$ : اعشار RHS سطر  $i$  ام
  - $w_j$ : متغیر غیرپایه ای ستون  $j$  ام
  - $f_{ij}$ : اختلاف ضریب متغیر ستون  $j$  ام در سطر  $i$  ام با مقدار قدرمطلق آن

## الگوریتم صفحات برشی

❖ محدودیت برش متناظر با سطر انتخاب شده را پس از استاندارد کردن، به جدول سیمپلکس اضافه کنید.

گام ۳

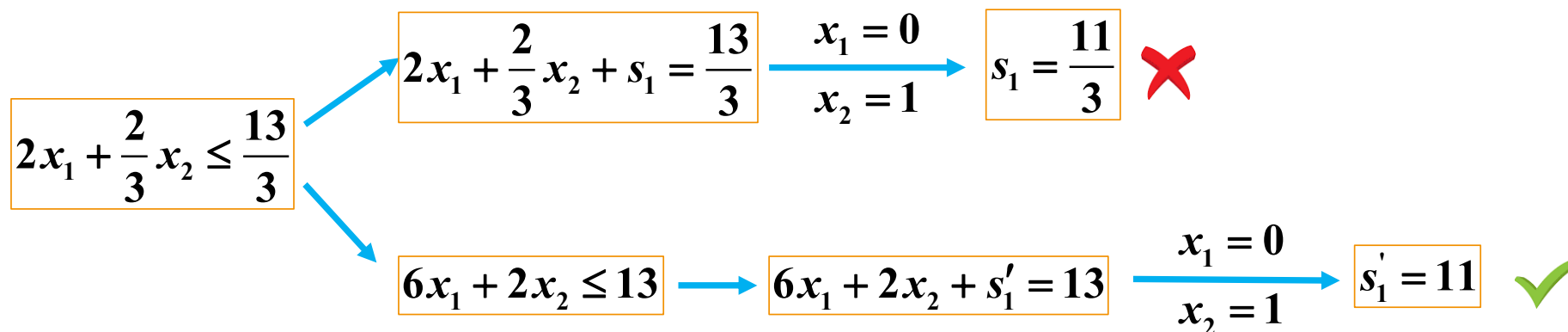
❖ جدول سیمپلکس جدید، نشدنی اما بهینه است. پس آن را با سیمپلکس دوگان ادامه دهید تا شدنی شود.

❖ در صورتی که جواب به دست آمده در جدول جدید عدد صحیح نبود، به مرحله ۲ برگردید. در غیر این صورت توقف کنید. جواب بهینه عدد صحیح حاصل شده است.

گام ۴

## الگوریتم صفحات برشی

**نکته:** شرط اولیه الگوریتم صفحات برشی: سمت راست و ضرایب تمام محدودیت‌های مساله باید عدد صحیح باشد. در غیر این صورت، الگوریتم بعد از رسیدن به جواب بهینه عدد صحیح ممکن است متوقف نشود.



## الگوریتم صفحات برشی برای مسئله MIP

**نکته:** در صورتی که مسئله از نوع MIP باشد:

۱- معادله برش سطر  $i$  به صورت زیر خواهد بود:

$$-\sum_{j \in J^+} \alpha_{ij} w_j - \frac{f_i}{f_i - 1} \sum_{j \in J^-} \alpha_{ij} w_j \leq -f_i$$

$f_i$ : اعشار RHS سطر  $i$ ام

$w_j$ : متغیر غیر پایه‌ای ستون  $j$ ام

$\alpha_{ij}$ : ضریب متغیر ستون  $j$ ام در سطر  $i$ ام

$J^+$ : اندیس ستون‌های با ضرایب مثبت

$J^-$ : اندیس ستون‌های با ضرایب منفی

۲- فقط برای متغیرهایی معادله برش نوشته می‌شود که قید صحیح بودن دارند.

## الگوریتم صفحات برشی برای مسئله MIP

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \text{int} \end{cases}$$

**مثال:** جدول بهینه یک مساله MIP به صورت زیر می باشد که در آن



|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $z$   | 0     | 0     | 0     | 3     | 5     | 2     | 1     | 20  |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 1/1   | 2     | -1/5  | 3/4   | 1/2 |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 2/3   | -5/1  | 2     | -1/6  | 3/4 |
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | 2/8   | 6     | 7/7   | -6/9  | 5/6 |

معادله  
برش؟

$$-(2.3x_4 + 2s_2) - \frac{0.4}{0.4-1}(-5.1s_1 - 1.6s_3) \leq -0.4$$

معادله برش  
متغیر  $x_2$